Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Kontrollskrivning 1B, måndagen 13 september 2010, 13.45–14.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	$37 \equiv 42 \pmod 5$.	x	
b)	Det finns hela tal x och y sådana att $12x + 15y = 99$.	x	
c)	Mängden $\{\emptyset\}$ har ett element och två delmängder.	x	
d)	Låt p vara ett primtal och a och b hela tal. Om p^2 delar $a \cdot b$ så gäller att p^2 delar a eller b.		x
e)	Det finns en injektiv funktion från de hela talen till de reella talen.	x	
f)	Till varje element $a \neq 0$ i ringen Z_{41} finns ett b i Z_{41} sådant att $ab = 5$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange $(24^{341} + 67) \pmod{23}$. Ett svar räcker, motivering behövs ej.

SVAR: 22

b) (1p) Låt $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ och $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 11\}$. Ange en mängd C sådan att

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \emptyset.$$

Ett svar räcker, motivering behövs ej.

SVAR: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

c) (1p) Ange tre olika oändliga mängder som är uppräkneliga. Ett svar räcker, motivering behövs ej.

SVAR: De naturliga talen, de hela talen och de rationella talen.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm, med hjälp av Euklides algoritm eller på annat sätt, den största gemensamma delaren till talen 1000 och 891.

Lösning: $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ men 891 har varken 2 eller 5 som delare så

SVAR $\mathrm{sgd}(1000, 891) = 1$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att formeln

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \, ,$$

är giltig för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning: Formeln sann när $n = 1$ ty $1 = 1^2$.

Visar nu att

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = (n+1)^2,$$

Vi finner att om $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ så

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2 \, ,$$

vilket vi skulle visa.

Enligt induktionsaxiomet gäller nu påståendet för alla naturliga tal $n \geq 1$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) I ringen Z_{13} har förvisso ekvationen

$$(x-7)(x-2)=0$$

rötterna $x=7$ och $x=2$. Din uppgift är att ge en korrekt motivering med bevis för varför det ej finns några fler. (Alla satser och resultat som presenterats under kursen får användas utan att man behöver bevisa dem.)

Lösning: Att elementet $x \in Z_{13}$ satisfierar

$$(x-7)(x-2)=0$$

i ringen Z_{13} innebär att

$$(x-7)(x-2) \pmod{13} = 0\ ,$$

dvs att talet 13 delar produkten av de bägge talen $x-7$ och $x-2$. Eftersom talet 13 är ett primtal så måste 13 dela minst ett av dessa tal dvs

$$(x-7) \pmod{13} = 0\ ,$$

eller

$$(x-2) \pmod{13} = 0\ ,$$

med andra ord att $x-7=0$ eller $x-2=0$ i ringen Z_{13}. Så enda möjligheterna är att $x=7$ eller $x=2$.