Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 5B, 11 oktober 2011, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Om man tar bort en kant från den kompletta bipartitat grafen $K_{3,3}$ så får man en planär graf.	x	
b)	En sammanhängande graf med n stycken noder och n stycken kanter har alltid minst en cykel.	x	
c)	Det kan finnas alternerande stigar till kompletta matchningar.		x
d)	En plan ritning av en sammanhängande planär graf med minst två noder kan ha fler områden än kanter.		x
e)	Antalet kanter i en komplett bipartit graf kan vara ett primtal.	x	
f)	Om en graf G har ett jämnt antal noder och alla dessa har jämn valens så är antalet kanter i G delbart med 4.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Rita en graf G med fem noder sådan att G har en Hamiltoncykel men saknar en Eulerkrets.

SVAR: Rita en cykel med 5 noder (och fem kanter) och rita sedan till en kant mellan två noder som inte är grannar.

b) (1p) En graf G har valenssekvensen 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4. Bestäm antalet kanter i grafen G.

SVAR: 12.

c) (1p) Formulera Halls bröllopssats.

SVAR: Se läroboken.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) I en bipartit graf med nodmängderna X och Y, dvs det finns inga kanter mellan noder i X och inga kanter mellan noder i Y, så gäller att X består av 12 noder som samtliga har valensen 4. Alla noder i Y har samma valens δ. Bestäm δ om antalet noder i Y är 8. Svaret skall motiveras.

Lösning: Antalet kanter i grafen är å ena sidan lika med

$$|X| \cdot 4 = 48$$

och å andra sidan lika med

$$|Y| \cdot \delta = 8 \cdot \delta \ ,$$

så enda möjligheten är att

SVAR: $\delta = 48/8 = 6$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Vilket är det minsta antal kanter en graf G kan ha om G har 37 komponenter och antalet noder i G är 112. Svaret skall motiveras.

Lösning: Minst antal kanter inträffar när komponenterna är träd (eftersom varje sammanhängande graf har ett spännade träd). Vi kan alltså förutsätta att grafen består av träden T_1, T_2, ..., T_{37} med respektive v_1, v_2, ..., v_{37} stycken noder och $e_1 = v_1 - 1$, $e_2 = v_2 - 1$, ..., $e_{37} = v_{37} - 1$ stycken kanter.

Eftersom

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{37} = 112 ,$$

så

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_{37} = (v_1 - 1) + (v_2 - 1) + \ldots + (v_{37} - 1) = 112 - 37 = 75 .$$

SVAR: 75

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Härled en formel för antal områden r som uppstår vid en plan ritning av en sammanhängade planär graf i vilken samtliga noder har valensen (graden) δ och antalet kanter är lika med e.

Lösning: Sambandet mellan antalet kanter och valensen hos noderna ger, med V betecknande mängden noder och E betecknande mängden av kanter att

$$2|E| = \sum_{a \in V} \delta(a) = \sum_{a \in V} \delta = |V| \cdot \delta \ ,$$

och därmed gäller att

$$v = \frac{2e}{\delta} \ .$$

Eulers formel $v + r = e + 2$ ger nu att

$$r = e + 2 - \frac{2e}{\delta} = \frac{(\delta - 2)e}{\delta} + 2 \ .$$

SVAR:

$$r = \frac{(\delta - 2)e}{\delta} + 2 \ .$$