

**Skrivningskod:**   
Glöm den inte!

**Om du vill:**   
Lägg till tre bokstäver.

**KTH Matematik**  
Olof Heden

$\Sigma$ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

**Lösning till kontrollskrivning 3A, 28 september 2010, 15.45–16.45,  
i SF1610 Diskret matematik för CİNTE.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks  $n$  medför godkänd uppgift  $n$  vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år),  $n = 1, \dots, 5$ .

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

**Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}p$ , inget svar  $0p$ , fel svar  $-\frac{1}{2}p$ . Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)  
**Kryssa för** om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

	sant	falskt
a) Om en delgrupp $H$ till en grupp $G$ består av fyra element så består också varje sidoklass till $H$ av fyra olika element.	x	
b) Om $g$ genererar den cykliska gruppen $G$ så genererar $g^2$ en delgrupp till $G$	x	
c) Låt $e$ beteckna identiteten i en grupp $G$ . Det kan finnas tre olika element $a, b, c \in G$ så att $ab = e$ och $ca = e$		x
d) Varje cyklisk grupp har precis en generator		x
e) Om $\varphi$ är en udda permutation så är $\varphi \circ \varphi$ en jämn permutation.	x	
f) Varje grupp $G$ med 19 element har inga andra delgrupper än de triviala delgrupperna $H = \{e\}$ och $K = G$ .	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

**2a)** (1p) Skriv permutationen definierad genom tablån

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

som en produkt av disjunkta cykler.

**SVAR:** (1 2 4 3)(5 6)

**b)** (1p) Fyll i nedanstående tabell så att den blir en multiplikationstabell till en grupp.

o	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c		b	e
b	b		a	e	c
c	c	b		d	
d	d		c		

**SVAR:**

o	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d	a	e	c
c	c	b	e	d	a
d	d	e	c	a	b

**c)** (1p) Skriv permutationen (1 3 5 2)(1 2 4) som en produkt av 2-cykler.

**SVAR:** (1 2)(1 5)(1 3)(1 4)(1 2)

Namn	poäng uppg.3

**3)** (3p) Låt  $G$  beteckna gruppen  $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ . Ange en delgrupp  $H$  till  $G$  som innehåller elementet 5 men inte innehåller elementet 2.

**SVAR:**  $\langle 5 \rangle = \{0, 5, 10, 15\}$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Undersök om mängden av inverterbara element i ringen  $Z_{14}$  utgör en cyklisk grupp med avseende på multiplikationen i  $Z_{14}$ .

(Hjälp: de inverterbara elementen är 1, 3, 5, 9, 11, 13.)

**LÖSNING:** De inverterbara elementen i en ring bildar alltid en grupp så det räcker att undersöka om det finns något element  $g$  som genererar gruppen, dvs om

$$\langle g \rangle = \{g, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6 = 1\} = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\} = G.$$

Vi testar elementet 3 och finner att varken  $3^1 = 3$ ,  $3^2 = 9$  eller  $3^3 = 13$  är lika med identiteten. Alltså kan ordningen av elementet 3 varken vara 1, 2 eller 3 och måste då vara lika med 6, eftersom ett elements ordning alltid delar antalet element i gruppen.

Elementet  $g = 3$  har ordning 6 och kommer att generera en cyklisk delgrupp med 6 element till givna gruppen  $G$  med 6 element, och alltså måste  $\langle 3 \rangle = G$ .

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt  $\gamma = (1\ 3\ 4)(2\ 5)$ . Bestäm en permutation  $\psi$  sådan att

$$\gamma^{13}\psi = \gamma^{10} .$$

**LÖSNING:** Vi ser att  $\gamma$  har ordning 6 och då blir  $\gamma^{13} = \gamma^6 \cdot \gamma^6 \cdot \gamma = \gamma$  och vår ekvation kan förenklas till

$$\gamma\psi = \gamma^{10} ,$$

eller efter multiplikation med  $\gamma^{-1}$  till

$$\psi = \gamma^9 = (\gamma^3)^3 .$$

Men  $\gamma^3 = (2\ 5)$  så

$$\psi = (2\ 5)(2\ 5)(2\ 5) = (2\ 5) .$$