KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 1A, fre 18 september 2009, 10.45–11.15,,
i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) 57 är ett primtal.		x
b) $sgd(34, 18) = 2$ (OBS $sgd(x, y) = gcd(x, y)$)	x	
c) Den diofantiska ekvationen $61x+37y = 2$ går ej att lösa.		x
d) $309 \equiv 341 \pmod 8$	x	
e) Det finns bara en injektiv funktion från de hela talen till de naturliga talen.		x
f) $(A \cup B) \cap B^C = A \setminus B$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$, $B = \{3, 2, 5, 7, 11, 12\}$ och $C = \{1, 6, 7, 8\}$. Ange elementen i mängden $((A \setminus C) \cap (B \setminus C)) \cup (A \cup B)$

SVAR: $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12\}$

b) (1p) Ange inversen till elementet 7 i ringen Z_{13}.

SVAR: 2

c) (1p) Skriv talet 112 i två-systemet.

SVAR: 1110000

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm den största gemensamma delaren till talen 412 och 518.

Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned}518 &= 412 + 106\\ 412 &= 4 \cdot 106 - 12\\ 106 &= 9 \cdot 12 - 2\\ 12 &= 6 \cdot 2 + 0\end{aligned}$$

Av algoritmen framgår att $sgd(412, 518) = 2$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm den minsta positiva resten vid division av 7^{35} med talet 5.

Lösning:

$$7^{35} \equiv_5 2^{35} \equiv_5 (2^4)^8 \cdot 2^3 \equiv_5 1^8 \cdot 8 \equiv_5 3$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Visa på valfritt sätt att om en talföljd definieras genom $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ och $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, för $n = 2, 3, \ldots$ så gäller att $a_n = 2^n + 3^n$ för alla naturliga tal n.

Lösning:

II. Vi visar att för alla $n = 2, 3, 4, \ldots$ att om $a_k = 2^k + 3^k$ för alla heltal k mindre än n så kommer även $a_n = 2^n + 3^n$.

Vi finner då att under dessa omständigheter så gäller

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) = (10-6)2^{n-2} + (9-6)3^{n-2} = 2^n + 3^n,$$

vilket vi skulle visa.

I. För att genomföra induktionssteget behöver vi två startvärden dvs att $a_0 = 2^0 + 3^0$ respektive att $a_1 = 2^1 + 3^1$. Men detta är ju sant ty $a_0 = 2$ och $a_1 = 5$ var ju givna värden.

III. Vi kan nu konstatera att induktionen fungerar och att resultatet alltså följer av induktionsprincipen.