Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 4B till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 2 mars 2011, kl 10.15-10.50.

1. (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 1, 2, 1)$ på det delrum L till R^4 som genereras av vektorerna $(0, 1, 1, 1)$ och $(1, 1, 1, -2)$, dvs $L = \text{Span}\{(0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -2)\}$.

Lösning: De uppspännande vektorerna $\bar{f}_1 = (0, 1, 1, 1)$ och $\bar{f}_2 = (1, 1, 1, -2)$ är ortogonala eftersom den inre produkten mellan dom är 0. Vi får då projektionen till

$$\text{Proj}_L((1, 1, 2, 1)) = \frac{(1, 1, 2, 1) \cdot (0, 1, 1, 1)}{(0, 1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1, 1)} \bar{f}_1 + \frac{(1, 1, 2, 1) \cdot (1, 1, 1, -2)}{(1, 1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1, -2)} \bar{f}_2 =$$

$$\frac{4}{3}(0, 1, 1, 1) + \frac{2}{7}(1, 1, 1, -2) = \frac{28}{21}(0, 1, 1, 1) + \frac{6}{21}(1, 1, 1, -2) = \frac{1}{21}(6, 34, 34, 16) .$$

SVAR: $(6/21, 34/21, 34/21, 16/21)$.

2. Låt P_n vara rummet av polynom av grad högst lika med n och med den inre produkten

$$< p(t) \mid q(t) >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t) \text{ dt} .$$

Då är P_0 ett delrum till P_2 och P_0 har ett ortogonalt komplement $P_0^\perp$ i rummet P_2. Bestäm en bas för $P_0^\perp$.

Lösning: Rummet P_2 har dimension 3 eftersom en bas för detta rum är t ex 1, t, t^2. Rummet P_0 har dimension 1 så rummet $P_0^\perp$ kommer att ha dimension 2. En bas för detta rum är då två vektorer $p_1(t)$ och $p_2(t)$ i P_2 som är ortogonala mot P_0. Eftersom P_0 spänns upp av polynomet 1 skall $< p_1(t) \mid 1 >= 0$ och $< p_2(t) \mid 1 >= 0$, dvs,

$$\int_{-1}^{1} p_1(t) \cdot 1 \text{ dt} = 0 \qquad \text{och} \qquad \int_{-1}^{1} p_2(t) \cdot 1 \text{ dt} = 0 .$$

Varken polynomen t eller t^2 tillhör P_0 så vi använder oss av dessa polynoms projektioner a resp b på P_0 för att hitta polynom i $P_0^\perp$. Vi söker alltså a och b så att

$$\int_{-1}^{1} (t - a) \cdot 1 \text{ dt} = 0 \qquad \text{och} \qquad \int_{-1}^{1} (t^2 - b) \cdot 1 \text{ dt} = 0 .$$

Då

$$\int_{-1}^{1} t \cdot 1 \text{ dt} = 0 \quad \int_{-1}^{1} b \cdot 1 \text{ dt} = 2b \quad \text{och} \quad \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1 \text{ dt} = 2/3 ,$$

kan vi låta $p_1(t) = t$ och $p_2(t) = t^2 - 1/3$.

SVAR: Till exempel t och $t^2 - 1/3$ utgör en bas för $P_0^\perp$.