Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 13 februari 2011, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkanda uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm en bas för nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: Nollrummet är lösningen till ett linjärt homogent ekvationssystem med den givna matrisen som koefficientmatris:

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

För godtyckliga värden på x_3 och x_4, dvs $x_4 = t$ och $x_3 = s$ hittar vi lösningar med $x_1 = -t$ och $x_2 = t - 2s$, eller

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t, t - 2s, s, t) = t(-1, 1, 0, 1) + s(0, -2, 1, 0).$$

Då $(-1, 1, 0, 1)$ och $(0, -2, 1, 0)$ således spänner upp nollrummet och är linjärt oberoende så utgör de en bas för nollrummet.

2. Betrakta vektorrummet R^4. Låt $\bar{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{e}_2 = (1, 2, 1, 2)$. Bestäm vektorer $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ i R^4 så att vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ bildar en bas för R^4. (För att få poäng på uppgiften måste lösningen motiveras. Enbart ett angivande av $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ ger inget poäng.)

Lösning: Vi finner det enklast att i detta specialla fall, och istället för att använda den generella metoden, pröva med vektorer $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ och sedan visa att determinanten, med vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ deras koordinater som kolonner blir skild från noll: Vi finner att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Kolonn 3 och kolonn 4 duger bra så

SVAR: Vi kan t ex ta $\bar{e}_3 = (1, 0, 0, 0)$ och $\bar{e}_4 = (0, 1, 0, 0)$.