Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 1A till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 2 februari 2011, kl 10.15-10.50.

1. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara matriser enligt nedan. Bestäm en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi bestämmer först inversen till matrisen $\mathbf{A}$ med hjälp av den vanliga algoritmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vi multiplicerar nu ekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ med $\mathbf{A}^{-1}$ till vänster och får $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, så

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Undersök om det finns något värde på talet a för vilket de två systemen nedan har någon gemensam lösning.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 5y + az = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + az = 6 \\ 2x + 4y + z = a \end{cases}$$

Lösning: En gemensam lösning satisfierar samtliga fyra ekvationer, och vi har att studera ett ekvationssystem med tre obekanta och fyra ekvationer. Vi genomför detta i tablåform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a & 5 \\ 1 & 3 & a & 6 \\ 2 & 4 & 1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a-4 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & a-6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a-4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & a-6 \end{array}\right)$$

Den tredje ekvationen i sluttablån ger att $z = 2$, och då den fjärde ekvationen lyder $-3z = a - 6$ måste vi ha att $a = 0$ för att en lösning skall finnas. Men med detta värde på talet a insatt i sluttablån hittar vi en lösning till systemet, eftersom det är på trappstegsform.

SVAR: Om och endast om $a = 0$ har de tvaa systemen en gemensam lösning.