Efternamn	Förnamn	Personnummer	Program	Betyg
Efternamn	Förnamn	Personnummer	Program	Betyg
Efternamn	Förnamn	Personnummer	Program	Betyg

KTH, Matematik
SF1637, Differentialekvationer, HT 2011.

Inlämningsuppgift

Fourierserier, partiella differentialekvationer, Fouriertransformer.

Parametrarna a, b och c är de tre från noll skilda första siffrorna i personnumret hos den person som står överst. Den inlämnade uppgiften ska bestå av detta försättsblad och lösningarna.
Parametervärden: $a =$, $b =$ och $c =$

1. Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - (a+c)\frac{\partial u}{\partial y} = bcu$$

som uppfyller villkoret $u(x, 0) = (ab + c)e^{2x} + (a + b + c)e^{-4x}$.

2. Betrakta funktionen

$$h(x) = \begin{cases} c + ax, & 0 < x < \pi, \\ -c + ax, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Vidare gäller att $h(x + 2\pi) = h(x)$. Skissera kurvan över några perioder. Bestäm Fourierserien hörande till funktionen h.

Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = \frac{3\pi}{2}$ och $x = 3\pi$.

3. Bestäm först produktlösningarna till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 b^2 c^2 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Bestäm de lösningar som även uppfyller randvillkoren $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Bestäm därefter den lösning som även uppfyller begynnelsevillkoret

a) $u(x, 0) = 4(a + b)\sin(abcx) + (b + c)\sin(3abcx),\ 0 < x < \pi$;

b) $u(x, 0) = g(x) = c + ax,\ 0 < x < \pi$.

4 a). Bestäm Fouriertransformen till $f(t) = te^{-a|t|}$.

b). Uttryck funktionen $f(t)$ som en Fourierintegral. Vilka värden konvergerar Fourierintegralen mot?

c). Utnyttja din resultat i a) för att bestämma Fouriertransformen av $\frac{t}{(a^2+t^2)^2}$.

5. Visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x} dx = \pi/2$. *Tips*: använd ex. 3.1 ur Kompendiet.

6. Använd Fouriertransform för att bestämma den lösningen till värmeledningsekvationen $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty < x < \infty,\ t > 0$, som uppfyller $u(x, 0) = e^{-|x|}$ för $-\infty < x < \infty$.