KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Måndagen den 26:e september, 2011

1. Beräkna integralen,

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^3}\,dx.$$

(Tips: Använd variabelsubstitution.)

Lösningsförslag. Vi beräknar integralen med hjälp av variabelsubstitution:

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^3}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ x = 2 \Rightarrow t = 8 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} = \frac{1}{3}\int_0^8 e^{-t}dt = \frac{1}{3}\left[-e^{-t}\right]_0^8 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-e^{-8} - (-e^0)\right) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-8}\right).$$

---

2. På vilket/vilka intervall är funktionen $f(x) = e^{2x^3-6x^2+3x+1}$ avtagande?

Lösningsförslag. Var en deriverbar funktion är växande/avtagande kan avgöras genom att betrakta derivatans tecken. Funktionen f är deriverbar och

$$f'(x) = (6x^2 - 12x + 3)e^{2x^3-6x^2+3x+1} = 6(x^2 - 2x + 1/2)e^{2x^3-6x^2+3x+1}.$$

Vi söker derivatans nollställen. Eftersom $e^{2x^3-6x^2+3x+1} > 0$ för alla x så har vi att

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1/2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm 1/\sqrt{2}.$$

Alltså är

$$f'(x) = 6\big(x - (1 - 1/\sqrt{2})\big)\big(x - (1 + 1/\sqrt{2})\big)e^{2x^3-6x^2+3x+1}$$

och från detta uttryck ser vi att teckentabellen blir

- $f'(x) > 0$ då $x < 1 - 1/\sqrt{2}$,
- $f'(x) < 0$ då $1 - 1/\sqrt{2} < x < 1 + 1/\sqrt{2}$
- $f'(x) > 0$ då $x > 1 + 1/\sqrt{2}$.

Om $f' < 0$ så är f strängt avtagande och om $f' > 0$ så är f strängt växande. Från teckentabellen följer alltså att f är avtagande på intervallet $[1 - 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}]$.

---

3. Betrakta funktionen
$$f(x) = x\sqrt{12 - x}$$
definierad på intervallet $[3, 11]$. Antar funktionen f värdet $14 + \sqrt{3}$?
(Tips: Glöm inte att hänvisa till satser ni använder och att förklara för läsaren varför förutsättningarna i satserna gäller.)

Lösningsförslag. Vi söker funktionens lokala extrempunkter för att kunna avgöra om funktionen antar värdet $14 + \sqrt{3}$.

Vi beräknar först funktionsvärdena i randpunkterna: $f(3) = 9$ och $f(11) = 11$. Från detta kan vi inte dra några slutsatser och därför söker vi stationära punkter. Funktionen f är deriverbar på intervallet $(3, 11)$ och
$$f'(x) = \sqrt{12 - x} - \frac{x}{2\sqrt{12 - x}} = \frac{2(12 - x) - x}{2\sqrt{12 - x}} = \frac{24 - 3x}{2\sqrt{12 - x}}.$$
Alltså är $x = 8$ den enda stationära punkterna och $f(8) = 16$. Eftersom $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ så är
$$f(3) = 9 < 14 + \sqrt{3} < 16 = f(8).$$
Funktionen f är kontinuerlig på $[3, 8]$, så från satsen om mellanliggande värden följer att det finns en punkt $\xi \in (3, 8)$ sådan att $f(\xi) = 14 + \sqrt{3}$.

Svar:

1. $\frac{1}{3}\left(1 - e^{-8}\right)$
2. På intervallet $[1 - 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}]$.
3. Ja.

ALLMÄNNA BEDÖMNINGSKRITERIER

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med **FTS** *(Förklarande text saknas)*.
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med **FLFT** *(För lite förklarande text)*.
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.

Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

PRELIMINÄRA BEDÖMNINGSKRITERIER

1.
   - Korrekt genomförd rimlig substitution, **2 poäng**, därefter korrekt primitiv funktion, **1 poäng**, därefter korrekt insättning av gränser, **1 poäng**.
   - Men, insättning av gränser som tillhör fel variabel, **-2 poäng**.
2.
   - Skriver att $f' < 0$ ger avtagande funktion, **1 poäng**.
   - Korrekt derivering, **1 poäng**.
   - Korrekt beräkning av stationära punkter, **1 poäng**.
   - Korrekt teckenschema med slutsats, **1 poäng**.
3.
   - Korrekt bestämning av punkt med värde mindre än $14 + \sqrt{3}$, **1 poäng**.
   - Korrekt bestämning av punkt med värde större än $14 + \sqrt{3}$, **1 poäng**.
   - Korrekt kontinuitetsargument och slutsats, **2 poäng**.
   - Om det inte påpekas att $14 + \sqrt{3} < 16$, **-1 poäng**.