Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösning till kontrollskrivning 2A, 25 september 2009, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.	x	
b) $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$.	x	
c) $25!/(12! \cdot 7! \cdot 6!)$ är ett heltal	x	
d) $n! \cdot m! = (n \cdot m)!$		x
e) $\binom{n}{3} \leq \binom{n}{4}$ för alla heltal $n \geq 4$.		x
f) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^2b^2 + b^4$.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange värdet av Stirlingtalet $S(23, 23)$.

SVAR: 1.

b) (1p) Ange antalet sätt att placera 10 identiska objekt i tre olika lådor. (Obs svaret skall vara ett heltal.)

SVAR:

$$\binom{10+3-1}{3-1} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$$

c) (1p) Ange en bra och användbar formel för beräkning av antalet element i unionen av tre mängder A, B och C.

SVAR: $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Tolv personer skall delas in i tre grupper med vardera 3, 4 resp 5 personer. På hur många sätt kan detta ske om personerna A, B och C skall placeras i olika grupper. (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra ”räknesätten”.)

Lösning: Först placerar vi ut A, det finns tre möjliga grupper han kan välja bland, sedan B och då återstår två grupper för honom att välja bland. Den överblivna gruppen är den som C får ta. Så totalt 3! möjliga fördelningar av A, B och C.

Sen ger vi en grupptillhörighet till de övriga nio personerna, varav 2 skall till gruppen med tre element, 3 till gruppen med fyra element och 4 till gruppen med 5 element. Antalet möjliga sådana fördelningar ges av multinomialkoefficienten

$$\binom{9}{2,3,4}$$

Multiplikationsprincipen ger nu
SVAR

$$3!\binom{9}{2,3,4}.$$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) En klass med 12 flickor och 14 pojkar skall utse en grupp med tre flickor och fyra pojkar. På hur många olka sätt kan detta ske om det är så att om flickan F ingår så kan varken pojken P eller Q vara med i gruppen. (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".)

Lösning: Två möjliga fall, antingen tillhör flickan F gruppen eller så gör hon inte det.

Fall 1: Välj flickan F, ett sätt, samt komplettera med ytterligare två av de återståended 11 flickorn vilket går på $\binom{12-1}{2}$ sätt. Om flickan F är med kan ingen av pojkarna P och Q väljas, så antalet möjliga pojkval är $\binom{14-2}{4}$. Om flickan F finns med i gruppen finns totalt

$$\binom{11}{2} \cdot \binom{12}{4},$$

möjliga gruppindelningar.

Fall 2: Flickan F finns inte med och då skall tre flickor bland de övriga 11 flickorna väljas vilket går på totalt $\binom{11}{3}$ olika sätt. Om flickan F inte finns med kan pojkarna väljas utan restriktioner, vilket ger $\binom{14}{4}$ möjligheter. Om flickan F inte finns med så finns totalt

$$\binom{11}{3} \cdot \binom{14}{4},$$

möjliga gruppindelningar.

Räknar vi nu samman alla möjligheter blir det totalt

$$\binom{11}{2} \cdot \binom{12}{4} + \binom{11}{3} \cdot \binom{14}{4},$$

möjliga gruppindelningar, vilket blir vårt svar.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Fem män och fem kvinnor skall ställa sig i två lika långa led framför kassa 1 och kassa 2. På hur många olika sätt kan detta ske om det ena ledet skall ha precis två män? (Det räcker att svara med ett uttryck som går att beräkna med hjälp av de fyra "räknesätten".

Lösning:

Op 1: Välj den kö som skall innehålla två män: Totalt $n_1 = 2$ möjligheter.

Op 2: Utse de två männen och de tre kvinnorna till denna kö: Totalt $n_2 = \binom{5}{2}\binom{5}{3}$.

Op 3: Ordna kö 1: $n_3 = 5!$ olika sätt.

Op 4: Ordna kö 2: $n_4 = 5!$ olika sätt.

Multiplikationsprincipen ger nu

SVAR:

$$2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 5! \cdot 5!$$