

Skrivningskod:
Glöm den inte!

Om du vill:
Lägg till tre bokstäver.

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

**Lösning till kontrollskrivning 1A, måndagen 13 september 2011,
i SF1610 Diskret matematik för CİNTE.**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.)

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

a) $17^8 \equiv 2^8 \pmod{5}$.

b) $(111111)_2 = (63)_{10}$.

c) Mängden av alla primtal är en uppräknligt oändlig mängd.

d) Om $\text{sgd}(a, b) = 1$, $\text{sgd}(b, c) = 1$ och $a \neq c$ så är alltid $\text{sgd}(a, c) = 1$.

e) Om A och B är olika mängder så är alltid $A \setminus B \neq B \setminus A$.

f) I alla ringar Z_n , där $n \geq 3$, är elementet $n - 2$ inverterbart.

	sant	falskt
a)	x	
b)	x	
c)	x	
d)		x
e)	x	
f)		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange en lösning i ringen Z_{11} till ekvationen $4x + 6 = 1$.

SVAR: 7

b) (1p) Låt $A = \{\emptyset, 0, \{\emptyset\}\}$. Skriv upp samtliga delmängder till A .

SVAR: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, 0\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{0, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, 0, \{\emptyset\}\}$

c) (1p) Låt N beteckna mängden av naturliga tal och låt B beteckna mängden av jämna hela tal. Beskriv en bijektion mellan mängderna N och B . (Beskrivningen behöver inte vara formell, ett tydligt diagram räcker. Du kan anta att 0 är ett naturligt tal.)

SVAR: T ex

$$\varphi(n) = \begin{cases} n & \text{för } n = 0, 2, 4, \dots \\ -(n+1) & \text{för } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen

$$315x + 242y = 1 .$$

Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 315 &= 242 + 73 \\ 242 &= 3 \cdot 73 + 23 \\ 73 &= 3 \cdot 23 + 4 \\ 23 &= 6 \cdot 4 - 1 \end{aligned}$$

Ur räkningarna ovan härleder vi att

$$\begin{aligned} 1 &= 6 \cdot 4 - 23 = 6(73 - 3 \cdot 23) - 23 = \\ &= 6 \cdot 73 - 19 \cdot 23 = 6 \cdot 73 - 19(242 - 3 \cdot 73) = \\ &= 58 \cdot 73 - 19 \cdot 242 = 58(315 - 242) - 19 \cdot 242 = \\ &= 58 \cdot 315 - 77 \cdot 242 \end{aligned}$$

En lösning är alltså $x = 58$ och $y = -77$. Eftersom talen 315 och 242 visade sig vara relativt prima får vi, enligt lösningsformel i läroboken

SVAR: $x = 58 + k \cdot 242$ och $y = -77 - k \cdot 315$ där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm $343^{1001} \pmod{15}$.

Lösning: Då $343 \equiv (-2) \pmod{15}$, samt $(-2)^4 \equiv 1 \pmod{15}$ så har vi att

$$343^{1001} \equiv_{15} (-2)^{1001} \equiv_{15} ((-2)^4)^{250}(-2) \equiv_{15} 1^{250}(-2) \equiv_{15} -2 \equiv_{15} 13 .$$

SVAR: 13

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Betrakta talföljden $b_n = 2^n + 2 \cdot 4^n$, definierad för $n = 0, 1, 2, \dots$, samt den talföljd a_n som rekursivt definieras genom rekursionen

$$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots$$

och med begynnelsevärdena $a_0 = 3$ och $a_1 = 10$. Visa att dessa talföljder är lika, dvs att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Lösning: I Vi konstaterar att $a_1 = b_1$ och $a_0 = b_0$.

II Vi visar att $a_k = b_k$ för $k \leq n-1$ medför att $a_n = b_n$. Den rekursiva formeln ger då att

$$\begin{aligned} a_n &= 6b_{n-1} - 8b_{n-2} = 6(2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}) - 8(2^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-2}) = \\ &= 12 \cdot 2^{n-2} - 8 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 24 \cdot 4^{n-2} - 2 \cdot 8 \cdot 4^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 16 \cdot 4^{n-2} = \\ &= 2^n + 2 \cdot 4^n = b_n. \end{aligned}$$

III Enligt induktionsprincipen gäller nu att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$