Exempel :: Projektion till delrum

Vi ska studera hur man kan projicera en vektor ned till ett tvådimensionellt delrum

Exempel 1. Bestäm projektionen av vektorn $u = (1, 2, 3)$ på

1. det delrum W_a som spänns av vektorerna $a_1 = (1, 2, 1)$ och $a_2 = (1, -1, 1)$.
2. det delrum W_b som spänns av vektorerna $b_1 = (2, 1, 2)$ och $b_2 = (1, 1, 1)$.

1. Dessa vektorer är ortogonala och då kan vi beräkna projektionen enligt

$$\begin{aligned}\mathbf{proj}_{W_a} u &= \frac{u \bullet a_1}{||a_1||^2} a_1 + \frac{u \bullet a_2}{||a_2||^2} a_2 = \frac{8}{6}(1, 2, 1) + \frac{2}{3}(1, -1, 1) = \\ &= (8/6 + 4/6, 16/6 - 4/6, 8/6 + 4/6) = (2, 2, 2)\end{aligned}$$

2. Vektorerna här är inte ortogonala vilket gör att vi måste göra en minstakvadratprojektion för att beräkna vår projektion... Vår projektionsvektor, kalla den x kan skrivas som linjärkombination av vektorerna b_1 och b_2. Detta betyder att x ligger i kolonnrummet till matrisen B. Om också u ligger i detta kolonnrum så blir x koordinaterna för u relativt basvektorerna b_1 och b_2. Om u inte ligger W_b så ges projektionens koordinater av minsta kvadratlösningen till $Bx = u$:
   Normalekvationen $B^T Bx = B^T u$ blir

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

   Gausselimination ger lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = 2$. Detta ger oss projektionen

$$\mathbf{proj}_{W_b} u = x_1 b_1 + x_2 b_2 = (2, 2, 2)$$

∎

Exempel 2. Projicera vektorn $u = (1, 2, 3)$ ned till delrummet som ges av planet W som ges av $x - z = 0$.

I detta exempel så har vi ingen bas given. Ett sätt att lösa uppgiften på är att ta fram en bas för delrummet och lösa uppgiften med de idéer som vi använde i föregående exempel. Vi ska istället studera ett annat alternativ som bygger på att man projicerar i planets normalriktning. Projektionen av u i delrummet plus projektionen i normalen måste blir u själv vilket ger att $u - \mathbf{proj}_n u$ är den vektor vi söker.

Planets normalvektor :: $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$.

u's projektion i normalriktningen :: $\mathbf{proj}_n u = \frac{u \bullet n}{||n||^2} n = (-1, 0, 1)$

u's projektion i planet :: $\mathbf{proj}_W u = u - \mathbf{proj}_n u = (1, 2, 3) - (-1, 0, 1) = (2, 2, 2)$.

∎

Notera att de tre delrummen W_a, W_b och W är identiska med varandra, vilket förklarar varför vi får samma projektion!