Förel 8: §4.4 – 4.6

Bas. Dimension. Basbyte

ATT Förstå ett ekv.syst

EX1
$$(*)\begin{cases} 2x+y+2z=1 & (1)\\ 3x+2y+3z=2 & (2)\\ 3x+2y+z=3 & (3)\end{cases}$$

A. Rad förståelse

Varje rad (1), (2), (3) innebär ett plan i $\mathbb{R}^3$

(*) har en enda lösning
Exakt $\Longleftrightarrow$ alla
3 plan skär varandra
i en enda punkt.
(*) har ∞-många lösning
om alla plan skär
varandra längs en
rät linje i $\mathbb{R}^3$
$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t\vec{v}$

feb 1-13:03

(*) Saknar lösningar menas att alla 3 plan inte skär varandra

B. "Kolonnförståelse"

Vi skriver (*) så här

$$x\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}+y\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}+z\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}_3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$$\Leftrightarrow x\vec{u}_1+y\vec{u}_2+z\vec{u}_3=\vec{v}$$

(*) systemet exakt en lösning menas då att $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är linjärt oberoende och därmed utgör en bas i $\mathbb{R}^3$

om vi har ∞ många lösningar $\Longrightarrow$ att vi har i en delrum M av $\mathbb{R}^3$, $M \neq \mathbb{R}^3$

Def bas

Om n st $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k$ i ett vektorrum $\bar{V}$ är linjärt oberoende så sägs att dessa utgör en bas i $\bar{V}$

Varje $\vec{v} \in \bar{V}$ kan skrivas som

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{u}_k$$

$$\bar{V} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_k]$$

$$= \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_k\}$$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_k$ fyller upp rummet $\bar{V}$.

under villkoren att de är linj. ober.

då $\dim(\bar{V}) = k$

feb 1-13:23

$$\mathbb{R}^n = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$$

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0 \ldots 0)$$

$$\vec{e}_n = (0, 0 \ldots, 1)$$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ kallas

för standardbas

i $\mathbb{R}^n$ tecknas B_1

feb 1-13:24

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$$

$$\vec{u}_B = (x_1, \ldots, x_n)$$
$$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Ex2 $P_n = \{$alla reella polynom av grad $n\}$

$$p \in P_n \iff p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ är stand~~ba~~basen i P_n

feb 1-13:26

$P_B = (a_0, a_1, \ldots, a_1)$

$\dim(P_n) = n+1$

= antalet lin. ober

$\underbrace{\{1, x, \ldots x^n\}}_{(n+1)\text{ st.}}$

Ex $M_{nm} = \{$alla matriser

av formen $n \times m\}$

feb 1-13:28

M_{22} alla $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Standard bas för M_{22} är $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

feb 1-13:30

Bra EX

a) Finn bland vektorerna

$\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,-2,1)$

$\vec{v}_3 = (0,1,0)$, $\vec{v}_4 = (2,3,2)$ " $\vec{v}_5 = (1,0,3)$

En bas i $\mathbb{R}^3$

b) finn koordinaterna

till $\vec{u} = (1,1,1)$ map

denna funna bas.

<u>Lösning</u> Vi skall välja (finna) bland $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5$ 3 linj ober vektorer som skall bilda en bas i $\mathbb{R}^3$ och sedan uttrycka $\vec{u}$ i denna bas.

<u>Metod</u> ställ upp $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5$ som kolonner i en matris för att finna med Gausselimination de sökta linj. ober. vekt.

Ans: De kolonner som har ledande ettor måste vara linj ober. Om det finns tre utgör dessa tre kolonner i den ursprungliga matrisen också en bas i $\mathbb{R}^3$

Om vi har $\vec{u}$ i HL kommer vi samtidigt vilken linj komb. av de tre basvektorerna

Räkning

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & \vec{v}_5 & \vec{w} \end{array} \sim (GDS)$$

$$\sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 7/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & & \vec{v}_3 \end{array} \end{array}$$

Ledande ettor i
kol 1 ($\vec{v}_1$) kol 2 ($\vec{v}_2$)
och kol 5 ($\vec{v}_5$)
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5$ är linj ob
utgör en bas i $\mathbb{R}^3$

Vidare
$$\vec{u} = (1,1,7) = \frac{3}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 + 0\vec{v}_5$$

Kontroll

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{u}} = \frac{3}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,-2,1) + 0\,(1,0,2)$$

$$\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 + 0\,\vec{v}_3$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2},\ 0+1,\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (1,1,1)$$

Basbyte

Problem Givna två baser i $\mathbb{R}^2$

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ gammal bas

$B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ ny bas

uttryckt i den gamla basen B

Via sambandet

feb 1-14:13

$$(1)\begin{cases} \vec{f}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$(\vec{f}_1)_B = (a, b)$$

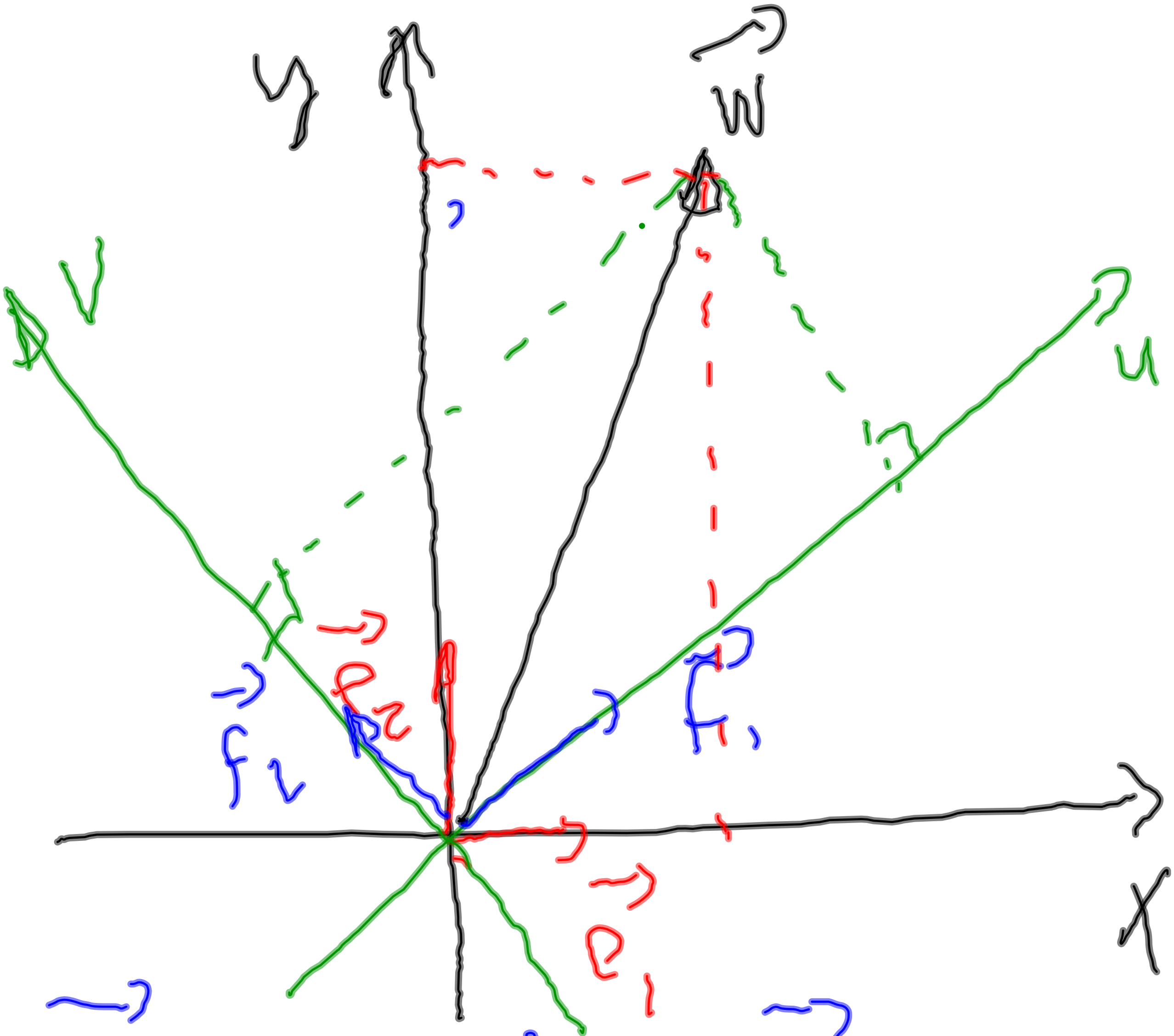
$$(\vec{f}_2)_B = (c, d)$$

Låt $\vec{W} = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2$

dvs $(\vec{W})_{B'} = (u, v)$

Finn $(W)_B = (x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

feb 1-14:15



$$\vec{w} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$$
$$= u\,\vec{f}_1 + v\,\vec{f}_2$$

Finn sambandet mellan (x, y) och (u, v)

feb 1-14:18

Lösning

$\vec{w} = u\vec{f_1} + v\vec{f_2} = \Big\{$ sambandd mellan gamla basen $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ och nya basen $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ ges

$$\begin{cases} \vec{f_1} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} \\ \vec{f_2} = c\vec{e_1} + d\vec{e_2} \end{cases}$$

$$\underbrace{u\vec{f_1} + v\vec{f_2}}_{u(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}) + v(c\vec{e_1} + d\vec{e_2})} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

feb 1-14:21

$$= (ua + vc)\vec{e}_1 + (ub + vd)\vec{e}_2$$

$$= x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ua + vc \\ y = ub + vd \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{(\vec{w})_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{(w)_{B'}}$$

feb 1-14:24

$P = P_{B' \to B}$ = basbyte

matrisen från basen B' till basen B

$\det(P) \neq 0 \iff P^{-1}$

$$P^{-1} = \left(P_{B' \to B}\right)^{-1} = P_{B \to B'}$$

feb 1-14:26

Resultat

$$\left(\vec{V}\right)_B = \left(P_{B' \to B}\right)\left(\vec{V}\right)_{B'}$$

Gamla koordinater (x, y) = beskrivna i denna nya koord.

$$\left(\vec{V}\right)_{B'} = \left(P_{B' \to B}\right)^{-1}\left(\vec{V}\right)_B$$

nya koord = Beskrivna i gamla koord.

feb 1-14:27

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

gamla koord $= P$ (nya koord)

<u>Ex</u> i $\mathbb{R}^2$ väljs ett nytt koord syst med basvektorer

$$(*)\begin{cases} \vec{f_1} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} = (3,4) \\ \vec{f_2} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} = (2,3) \end{cases}$$

1) om $\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$

Finn koord till $\vec{v}$ i den nya basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$

<u>lösning</u> (*) säger att

Vi har sambandet mellan gamla basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ och nya basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$

feb 1-14:32

Övergång matrisen från nya basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ till gamla basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ges av

$$P_{B' \to B} = P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

feb 1-14:34

$\det(P) = 9 - 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow P^{-1}$ finns

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

se kursboken

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right]$$

Sambandet mellan gamla koord (x, y) och nya koord (u, v) ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vi har Då

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

feb 1-14:37

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

P^{-1}

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} P = I$$

Pels $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

Pels $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Om $\vec{V} = 3\vec{e_1} + 7\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\sim}$$

vill ha $\vec{v} = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Svar

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 = -5\vec{f}_1 + 9\vec{f}_2$$