Förel nr 19. Diagonalisering av symmetriska $(n \times n)$-matriser via en ON-matris P

För ett antal vektorer $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ skall vara en ON-bas i $\mathbb{R}^n$ krävs

① Vektorerna är lika många som rummets dimension. Här $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

② Vektorerna är parvis vinkelräta och har alla längd 1 dvs

$$\vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \iff |\vec{f}_j| = 1, \ j = 1 \dots n$$

Ett sätt att sammanfatta dessa villkor är att bilda matrisen

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \dots & \vec{f}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Krav 2. $\iff PP^t = P^tP = I \iff$
$$P^{-1} = P^t$$

Så säges att matrisen P är ON-matris

Bra Ex Låt $\vec{f}_1 = \frac{1}{3}(2,1,2)^t$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{3}(-2,2,1)^t$

$$\vec{f}_3 = \frac{1}{3}(1,2,-2)^t$$

Visa att $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ är ON-bas i $\mathbb{R}^3$

Lösning Bilda matrisen $P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$PP^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$= I \implies P$ ON-matris

Problem När vet man att en $(n \times n)$-matris A kan diagonaliseras med en ON-matris P

Svar Om $A = A^t$ (symmetrisk) så bildar egenvektorerna $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ till A en ortogonal bas.

$$\vec{f}_j \cdot \vec{f}_k = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \|\vec{f}_j\|^2, & j = k \end{cases}$$

Motivering

Om $A = A^t \Rightarrow (A\vec{f}_k) \cdot \vec{f}_j = \vec{f}_k \cdot (A\vec{f}_j)$

Ty ju $\vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = [\text{matris form}] = \vec{f}_k^{\,t} \vec{f}_j$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \underbrace{(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}_{\text{matris multiplikation}} = 1\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot6$$

$$(A\vec{f}_k) \cdot \vec{f}_j = \underbrace{(A\vec{f}_k)^t}_{\vec{f}_k^{\,t} A^t \vec{f}_j} \vec{f}_j = \vec{f}_k^{\,t} \underbrace{A}_{= A^t} \vec{f}_j$$

$$= \vec{f}_k \cdot A\vec{f}_j$$

Vill undersöka om $\vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = 0$, $j \neq k$

Vi har $A\vec{f}_k = \lambda_k \vec{f}_k$, $A\vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j$

då $\lambda_k \neq \lambda_j$

$$\underbrace{(A\vec{f}_k)}_{\lambda_k \vec{f}_k} \cdot \vec{f}_j = \vec{f}_k \cdot \underbrace{(A\vec{f}_j)}_{\lambda_j \vec{f}_j}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_k \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda_k - \lambda_j)}_{\neq 0} \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = 0 \Rightarrow \vec{f}_k \cdot \vec{f}_j = 0$$

V.S.V

SPEKTRALSATSEN

(Diagonaliseringssatsen) (Sats 8.7)

Till varje $(n \times n)$ symmetrisk matris A kan man finna en ON-matris P och en diagonalmatris D så att

$$A = PDP^t \text{ och } P^tAP = D$$

Vad satsen säger

Låt $A = A^t$ (ordning n)

Då gäller

(1) ALLA egenvärden till A är reella dvs $\det(A - \lambda I) = P(\lambda)$ har exakt n sty reella nollställen

(2) A har exakt n sty egenvektorer $\vec{f}_1, \dots \vec{f}_n$ som bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^n$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \cdots & \vec{f}_n \end{pmatrix} \Rightarrow PP^t = I$$

P är ON-matris

(3) $A = PDP^t \Leftrightarrow D = P^tAP$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Viktig läxa

Vilka (Vilken) av följande matriser kan diagonaliseras med en ON-matris?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 3 \\ c & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ a & b & c \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Motivera ditt svar med ord!

Bra Ex

Diagonalisera $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning

(1) Vi ser att $A = A^t$ är symmetrisk

$\therefore$ Enligt Spektralsatsen Varje symmetrisk kan diagonaliseras med en ON-matris P bestående av egenvektorer till A

(2) Finn egenvärden till A

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = P(\lambda)$$

$P(\lambda) = 0$ om $1-\lambda = 0$ eller

$$\underbrace{(1-\lambda)^2 - 1 = 0}_{1-\lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda = 0,2}$$

Delsvar $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

(3) Finn motsvarande egenvektorer

Fall $\lambda_1 = 0 \Rightarrow (A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y - z = 0 \\ \cancel{-y + z = 0} \end{matrix}$$

$x = 0$ och $y = z = t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_1, \quad \vec{f}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fall $\lambda_2 = 1$

Vi löser $(A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ (2)\ 0x + 0y - z = 0 \\ (3)\ 0x - y + 0z = 0 \end{cases}$$

(2) och (3) $\Rightarrow y = 0, z = 0$

(1) $\Rightarrow x =$ godt ($\neq 0$) ta $x = 1$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec f_2$$

obs! $\vec f_1 \cdot \vec f_2 = 0$

Fall $\lambda=2$. Vi löser $(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-2&0&0\\0&1-2&-1\\0&-1&1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}-x=0 & (1)\\ -y-z=0 & (2)\\ \cancel{-y-z=0}\end{cases}$$

ur (1) och (2) fås $x=0$, $y=-z=-t$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\vec u_3},\quad \vec f_3=\frac{\vec u_3}{|\vec u_3|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Delsvar

$$\vec f_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \vec f_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec f_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Bilda övergången matrisen

$$P=\begin{pmatrix}\vec f_1 & \vec f_2 & \vec f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

obs! $PP^t=I \Leftrightarrow P^{-1}=P^t$

$\vec f_1, \vec f_2, \vec f_3$ bildar en ON-bas

4) Diagonalisera A med P

$$P^tAP=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}^t\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&1/\sqrt{2}\\1&0&0\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=$$