Förel. 17

1) Basbyte matrisen P (övergång matris)

givna två baser

den gamla $e=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ (ON-bas i $\mathbb{R}^3$)

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Standardbas

och den nya basen $f=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$

$$f=(f_1,f_2,f_3)=\underbrace{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}}_{e}P$$

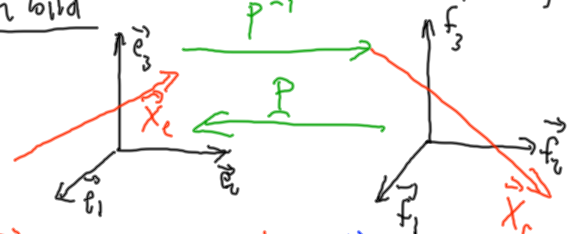
$$f=eP$$

P säges vara basbyte matrisen från basen e till den nya f

EX1
$$\begin{cases}\vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2 & \Leftrightarrow (\vec{f}_1)_e\\ \vec{f}_2=\vec{e}_2+\vec{e}_3 & \Leftrightarrow (\vec{f}_2)_e\\ \vec{f}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3 & \Leftrightarrow (\vec{f}_3)_e\end{cases}$$

$$P=\left((\vec{f}_1)_e\ (\vec{f}_2)_e\ (\vec{f}_3)_e\right)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

En bild



$\vec{X}_e=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$ $\quad\vec{X}_f=u\vec{f}_1+v\vec{f}_2+w\vec{f}_3$

$$\vec{X}_e=P\vec{X}_f \Leftrightarrow \vec{X}_f=P^{-1}\vec{X}_e$$

Resume $\quad P=\left((\vec{f}_1)_e\ (\vec{f}_2)_e\ (\vec{f}_3)_e\right)$

$$\det(P)\neq 0 \Leftrightarrow P^{-1} \text{ finns}$$

$\vec{X}_e=P\vec{X}_f$ (gamla koordinater (x,y,z) beskrivna i nya koordinater (u,v,w))

$\vec{X}_f=P^{-1}\vec{X}_e$ (nya koord (u,v,w) beskrivna i de gamla koord (x,y,z))

TAL 13c

$f_1 = \{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,\ 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\} \Leftrightarrow f_1 = e P_1 \quad (1)$

$\vec{f}_2 = \{\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,\ 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2\} \Leftrightarrow f_2 = e P_2 \quad (2)$

Vi söker matrisen $\underline{P}$: $f_2 = f_1 \underline{P}$

m (1) och (2) får vi

$f_2 = f_1 \underline{P} \Longleftrightarrow e P_2 = e P_1 P$

$\Longrightarrow P_2 = P_1 P \Longleftrightarrow P = P_1^{-1} P_2$

Vad vill vi ha med egenvärdena och egenvektorerna till en $(n \times n)$-matris A?

Svar: Vi vill finna en övergång matris P som diagonalisera A

Dvs vi vill finna en ny bas som beskriver A som en diagonal matris

Hur gör man? i 4 steg!

Steg 1 Bestäm egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ till A genom att lösa $\det(A-\lambda I) = P(\lambda) = 0$

Steg 2 Bestäm motsvarande egenvektorer dvs lös homogena ekv. system

$$(A-\lambda_k I)\vec{f}_k = \vec{0}, \quad k=1,2,3$$

Steg 3 Bilda övergångmatrisen (Basbyte matrisen mellan gamla och nya baserna)

$$P = \left((\vec{f}_1)_e \; (\vec{f}_2)_e \; (\vec{f}_3)_e \right)$$

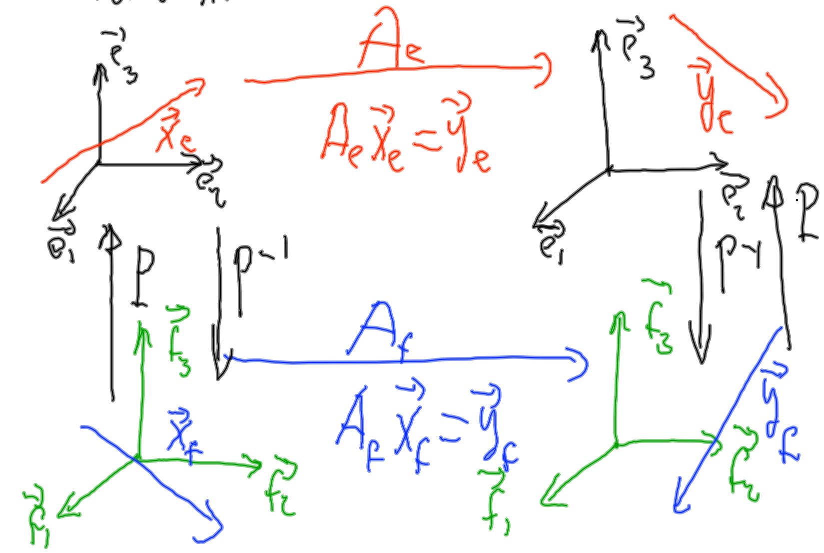
där $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ från steg 2

Steg 4 räkna ut

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} = D$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är från steg 1

En bild i $\mathbb{R}^2$



1) $A_e\vec{x}_e=\vec{y}_e$, $A_f\vec{x}_f=\vec{y}_f$

2) $\vec{x}_e = P\vec{x}_f \iff \vec{x}_f = P^{-1}\vec{x}_e$

3) $A_e = P\underbrace{A_f}_{D}P^{-1} \iff \underbrace{A_f}_{D} = P^{-1}A_eP$

Motivering för 3)

$A_e\vec{x}_e=\vec{y}_e$, $A_f\vec{x}_f=\vec{y}_f$

$A_f\vec{x}_f=\vec{y}_f \iff [\text{m}(2)\quad \vec{x}_f=P^{-1}\vec{x}_e]$

$A_fP^{-1}\vec{x}_e = \vec{y}_f = [\text{m}(2)] = P^{-1}\vec{y}_e \iff$

$A_fP^{-1}\vec{x}_e = P^{-1}\vec{y}_e \iff \underbrace{PA_fP^{-1}}_{A_e}\vec{x}_e=\vec{y}_e$

p.g.a $A_e\vec{x}_e=\vec{y}_e$

Bra EX För att diagonalisera A måste egenvektorer till A bilda en bas dvs om A är (n×n)-matris så måste A ha exakt n st linj. ober egenvektorer

$$\det(P) = \det\left(\left(\vec{f}_1\right)_e \cdots \left(\vec{f}_n\right)_e \right) \neq 0$$

Undersök om matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras.

Lösning A kan diagonaliseras om A har exakt $\boxed{\text{två}}$ st linj. oberoende egenvektorer. Den matrisen P som diagonalisera A ges då $P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix}$ där $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ är egenvektorer till A

steg 1 $\det(A - \lambda I) =$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

steg 2 Finn motsvarande egenvektorer

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sätt in $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 1 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot x + 0y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Godt. t. ex $y = t$

$$1 \cdot x + 0 \cdot t = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A har en enda egenvektor $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A kan Ej diagonaliseras

$$P = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 1 & ? \end{pmatrix} = ?$$

Bra Ex

$$A_e = P A_f P^{-1}$$
$$A_f = P^{-1} A_e P$$

$$\det(A_e) = \det(A_f)$$

Ty $\det(A_e) = \det(P A_f P^{-1})$

$$= \det(P)\det(A_f)\det(P^{-1})$$
$$= \det(A_f)\underbrace{\det(P)\det(P^{-1})}_{\det(\underbrace{P P^{-1}}_{I}) = 1}$$

Bra Ex

$$A_f = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = A_e: \quad A = P D P^{-1}$$
$$D = P^{-1} A P$$

$$\underset{(A_e)}{\det(A)} = \underset{(A_f)}{\det(D)} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

Avgör om $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras!

<u>Lösning</u> A kan diagoniliseras om A har exakt 3 linjärt oberoende egenvektorer $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ dvs $P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{pmatrix}$ som diagonaliser A måste ha en en invers $P^{-1} \Leftrightarrow \det(P) \neq 0$

<u>steg 1</u> finn egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ till A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left(-\lambda(1-\lambda) - 2\right) + (-\lambda + 2) - \left(-2 - (2)(1-\lambda)\right)$$

$$= \ldots\ldots = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

<u>Delsvar</u> $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Steg 2 Bestäm egenvektoren $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ som svarar mot $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 2$

Fall $\lambda_1 = 0$ $\quad (A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-0 & -1 & -1 \\ 1 & 1-0 & -1 \\ 2 & -2 & 0-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} (-3) \\ (-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} -\cancel{4}2y + \cancel{2}z = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \end{cases}$$

Två plan som skär varandra längs en rät linje som vi skall finna.

ur (1) $\quad z = 2y$ (sätt för $y = t$

$y = t$ och $z = 2t$ som sätts in i(2)

$(1) \Rightarrow x = z - y = 2t - t = t$

Svar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alla egenvektor till $\lambda = 0$ går genom origo

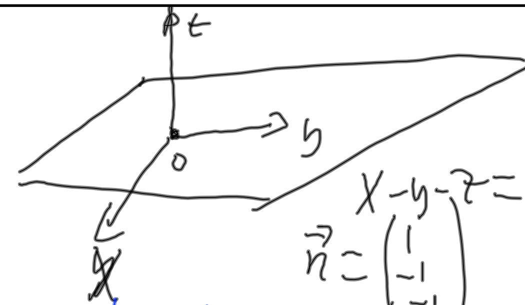
Välj $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (riktningsvektor till skärningslinjen)

Fall $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$: $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -1 & -1 \\ 1 & 1-2 & -1 \\ 2 & -2 & 0-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \cancel{2} & -\cancel{2} & -\cancel{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \underbrace{x - y - z = 0}_{}$$

ett plan som går genom origo



$x - y - z = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ett plan har alltid en bas av 2 vektorer. För att finna dessa så skall vi parametrisera planet med två parametrar s och t. Ty ekv

$x - y - z = 0 \iff x = y + z$

Sätt t.ex $y = t$ och $z = s$

$\Rightarrow x = t + s$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basvektorer till planet

Välj

$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Delsvar till $\lambda_1 = 0$ svarar $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ svarar $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 2$ svarar $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

steg 3 övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

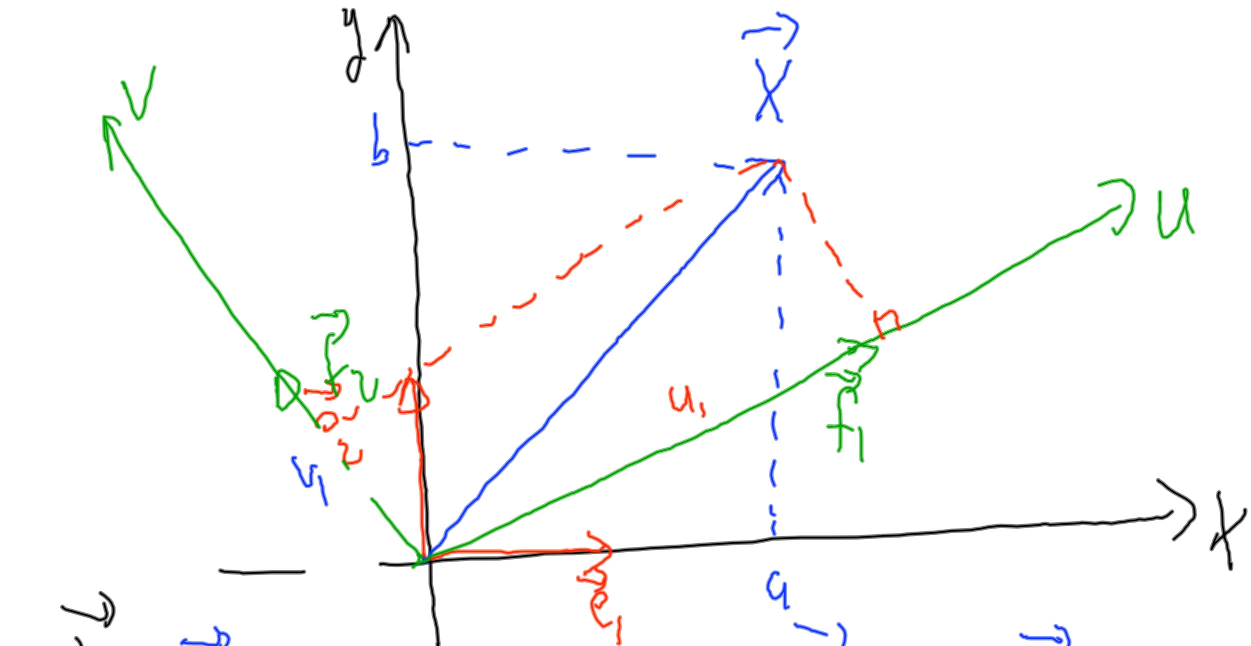
$\det(P) = -1 \neq 0$

Steg 4

$$P^{-1}AP = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{skall utföras}}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alt första basbyte - byte av koordinaterna



$$\vec{X} = \vec{X}_e = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = u_1 \vec{f}_1 + v_1 \vec{f}_2$$

Bra EX i $\mathbb{R}^2$ välj ett nytt koordinat system med bas vektorerna

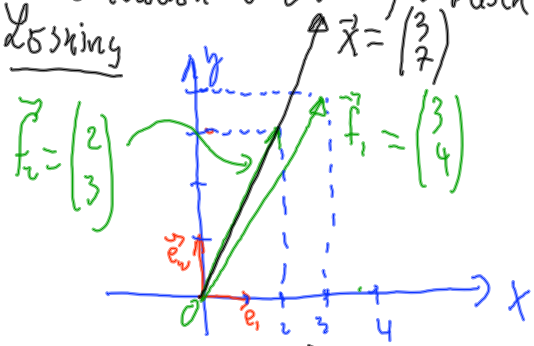
$$\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_e$$

$$\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e$$

① Om $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$. Finn koordinater till vektorn $\vec{x}$ i den nya basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$

② En rätlinje har ekv $2x - y = 8$ i den gamla basen. Vad blir denna ekvation i den nya basen?

Lösning



VET $\vec{X}_e = P\vec{X}_f \iff \vec{X}_f = P^{-1}\vec{X}_e$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sätt $\vec{X}_e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{X}_f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\vec{X}_e = P\vec{X}_f \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{gamla koord.}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\text{nya koord.}} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 4u + 3v \end{cases}$$

Om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \frac{1}{\underbrace{9-8}_{=1}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Om $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Fråga 1

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{X} = \underbrace{3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2}_{\text{gamla basen}} = \underbrace{-5\vec{f}_1 + 9\vec{f}_2}_{\text{nya basen}}$

(2) rät linje $2x - y = 3$ i gamla koordinater (x, y) skall uttryckas i den nya koordinater (u, v)

m(2): $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 4u + 3v \end{cases}$

$2x - y = 3 = \begin{bmatrix} \text{sätt in } x = 3u + 2v \\ \text{och } y = 4u + 3v \end{bmatrix} =$

$\underbrace{2(3u + 2v) - (4u + 3v)}_{2u + v} = 3$

Svar $2x - y = 3$ i (x, y) blir $2u + v = 3$ i (u, v)

Bra Ex

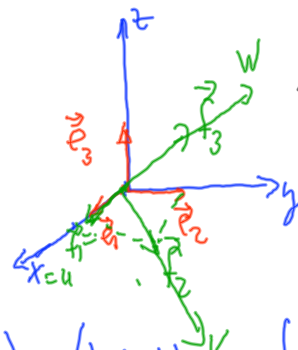
$$\begin{cases} \vec f_1 = \vec e_1 \iff (1,0,0)^t \\ \vec f_2 = \vec e_1+\vec e_2 \iff (1,1,0)^t \\ \vec f_3 = \vec e_1+\vec e_2+\vec e_3 \iff (1,1,1)^t \end{cases}$$

Hur ser ut planet $3x+7y-5z=6$ i den nya basen.

Lösning Övergångmatrisen

$$P = \left(\vec f_1\ \vec f_2\ \vec f_3\right) = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\det(P) = 1.1.1 = 1 \implies P^{-1} \text{ finns}$$



$$\vec X_e = P\,\vec X_f$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = u+v+w \\ y = v+w \\ z = w \end{cases}$$

Som skall sättas in i ekvationen

För det givna planet $3x+7y-5z=6$

$$\underbrace{3(u+v+w)+7(v+w)-5w}_{3u+10v+5w} = 6$$

$$3u+10v+5w = 6$$

Svar

$$\underbrace{3x+7y-5z=6}_{\text{gamla Koord}} \iff \underbrace{3u+10v+5w=6}_{\text{nya koord.}}$$

Här $\vec n = \begin{pmatrix}3\\7\\-5\end{pmatrix}$ Här $\vec n = \begin{pmatrix}3\\10\\5\end{pmatrix}$