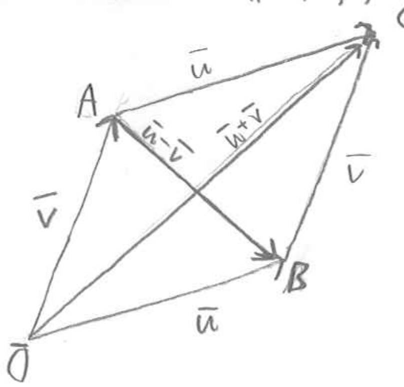
Använd vektorgeometri för att visa att diagonalerna i en romb skär varandra under rät vinkel (romb = parallellogram med alla sidor lika långa)



Lösning Placera ett av rombens hörn i origo. Inför vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ från origo till de två närmaste hörnen som i figuren. Diagonalerna blir nu (beteckningar som i figuren)

$$\overrightarrow{OC} = \bar{u}+\bar{v}$$
$$\overrightarrow{AB} = \bar{u}-\bar{v}$$

Skalärprodukten blir $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{v}$

$$= \|\bar{u}\|^2 - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{v} - \|\bar{v}\|^2$$
$$= \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2$$

Eftersom vi har en romb, är $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\|$, dvs $\|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2 = 0$, så skalärprodukten är 0, vilket innebär att diagonalerna är vinkelräta

Bonusproblem. Låt d_1 och d_2 vara diagonalernas längder, och låt C vara rombens omkrets. Visa att

$$\sqrt{d_1^2+d_2^2} = \frac{C}{2}$$

Lösning Vi har att $d_1 = \|\bar{u}+\bar{v}\|$ och $d_2 = \|\bar{u}-\bar{v}\|$ (eller vice versa), så

$$d_1^2+d_2^2 = \|\bar{u}+v\|^2 + \|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) + (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})$$
$$= [\text{räkna}] = (\|\bar{u}\|^2+\|\bar{v}\|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v}) + \|\bar{u}\|^2+\|\bar{v}\|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v}$$
$$= 2\|\bar{u}\|^2 + 2\|\bar{v}\|^2 = \left[\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = \frac{C}{4}\right] = 2\left(\frac{C^2}{16}\right) + 2\left(\frac{C^2}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{4}C^2 \quad \text{, dvs } \sqrt{d_1^2+d_2^2} = \frac{C}{2}$$

$$\left(C = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\| + \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\| = 4\|\bar{u}\| = 4\|\bar{v}\|\right)$$

Låt $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$, där $\bar{v}$ är nollskild. Bestäm k så att vektorerna $\bar{u}+k\bar{v}$ och $\bar{u}-k\bar{v}$ är ortogonala.

Lösning $(\bar{u}+k\bar{v})\cdot(\bar{u}-k\bar{v})$ ska vara noll. Vi ser att

$$
\begin{aligned}
(\bar{u}+k\bar{v})\cdot(\bar{u}-k\bar{v}) &= \bar{u}\cdot\bar{u} + k\bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot(k\bar{v}) - (k\bar{v})\cdot(k\bar{v}) \\
&= \bar{u}\cdot\bar{u} + k\bar{u}\cdot\bar{v} - k\bar{u}\cdot\bar{v} - k^2\,\bar{v}\cdot\bar{v} \\
&= \bar{u}\cdot\bar{u} - k^2\,\bar{v}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|^2 - k^2\|\bar{v}\|^2
\end{aligned}
$$

Detta ska vara noll:

$$
\|\bar{u}\|^2 - k^2\|\bar{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow k^2\|\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2
$$

$$
\Leftrightarrow k^2 = \frac{\|\bar{u}\|^2}{\|\bar{v}\|^2} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\|\bar{u}\|}{\|\bar{v}\|}
$$

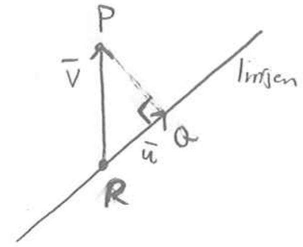
Avstånd mellan punkt och linje i rummet

Låt $P = (1,4,2)$, och låt $(x,y,z) = (3,0,1) + t(2,1,-1)$ vara en linje i rummet. Bestäm (a) den punkt på linjen som är närmast P

(b) avståndet från P till linjen.

(a) Lösningsmetod 1: Välj en godtycklig punkt R på linjen. Bilda vektorn $\bar{v}$ från R till P.

Beräkna den ortogonala projektionen av $\bar{v}$ på linjen. Specifikt:



Välj $R = (3,0,1)$. Vi får

$\bar{v} = (1,4,2) - (3,0,1) = (-2,4,1)$

Linjens riktning ges av vektorn $\bar{a} = (2,1,-1)$.

Projektionen av $\bar{v}$ på $\bar{a}$ är

$$\bar{u} = \operatorname{proj}_{\bar{a}} \bar{v} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} = \frac{(-2,4,1)\cdot(2,1,-1)}{2^2 + 1^2 + (-1)^2}(2,1,-1) = \frac{-1}{6}(2,1,-1)$$

$$= \frac{1}{6}(-2,-1,1)$$

Den sökta punkten Q på linjen (se figur) är alltså

$$Q = R + \bar{u} = (3,0,1) + \frac{1}{6}(-2,-1,1) = \left(\frac{16}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{6}(16,-1,7)}$$

Lösningsmetod 2: Den närmaste punkten Q har egenskapen att vektorn $\bar{w}$ från Q till P är ortogonal mot linjen, alltså mot $\underbrace{(2,1,-1)}_{\text{riktningsvektor}}$.

Q är på formen $(3,0,1) + t(2,1,-1)$ för något t, så

$$\bar{w} = P - Q = (1,4,2) - ((3,0,1) + t(2,1,-1))$$
$$= (-2,4,1) - t(2,1,-1).$$

Vi ska nu ha att $\bar{w}$ är ortogonal mot $(2,1,-1)$, dvs

$$((-2,4,1) - t(2,1,-1)) \cdot (2,1,-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1 - t(2^2 + 1^2 + (-1)^2)) = 0 \Leftrightarrow -1 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6},$$

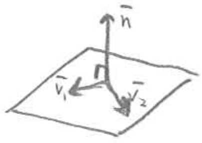
så $Q = (3,0,1) - \frac{1}{6}(2,1,-1) = \frac{1}{6}(16,-1,7)$

(b) Avståndet blir $\|P - Q\| = \|(1,4,2) - \frac{1}{6}(16,-1,7)\| = \|\frac{1}{6}(-10,25,5)\|$

$$= \|\tfrac{1}{6}\cdot 5(-2,5,1)\| = \frac{5}{6}\sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2} = \frac{5}{6}\sqrt{30}$$

Beräkna avståndet mellan punkten $P = (1,5,-1)$ och planet

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t_1\underbrace{(1,0,2)}_{\bar{v}_1} + t_2\underbrace{(0,2,1)}_{\bar{v}_2}.$$



Lösning Skriv planet på formen $ax+by+cz+d=0$

(a,b,c) får vi ur kryssprodukten av två vektorer i planet:

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = (1,0,2) \times (0,2,1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k} = (-4,-1,2)$$

Planet har alltså ekvationen $-4x - y + 2z + d = 0$.

$(1,2,3)$ ligger i planet $\Rightarrow -4\cdot 1 - 2 + 2\cdot 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Planets ekvation är alltså $-4x - y + 2z = 0$

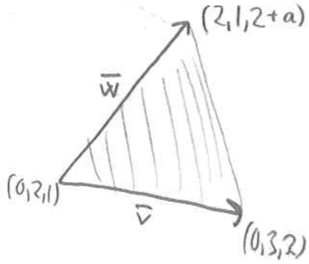
Avståndet från punkten (x_0, y_0, z_0) till planet $ax+by+cz+d=0$

ges av $$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-4\cdot 1 - 1\cdot 5 + 2\cdot(-1) + 0|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{21}}$$

$$= 11/\sqrt{21}.$$

Bestäm a så att triangeln med hörn i $(0,2,1)$, $(0,3,2)$ och $(2,1,2+a)$ får en så liten area som möjligt. Vad blir arean?

<u>Lösning</u> För att beräkna arean, bestämmer vi två av sidorna, uttryckta som vektorer $\bar{v}$ och $\bar{w}$:



$$\bar{v} = (0,3,2) - (0,2,1) = (0,1,1)$$
$$\bar{w} = (2,1,2+a) - (0,2,1) = (2,-1,1+a)$$

Arean ges av $\dfrac{\|\bar{v}\times\bar{w}\|}{2}$. Nu är

$$\bar{v}\times\bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1+a \end{vmatrix} = (a+2, 2, -2).$$

Arean blir alltså $\frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(a+2)^2}_{\text{som minst då } a+2=0} + 2^2 + (-2)^2}$, vilket blir minimalt

då $a=-2$, ty då blir $(a-2)^2 = 0$. Arean blir då

$$\frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Svar: $a=-2$ ger den minimala arean $\sqrt{2}$.

(a) Förklara vad som menas med att fyra vektorer spänner upp ett vektorrum V.
(b) Avgör om $(1,3,4)$, $(-1,-1,2)$, $(2,4,2)$, $(-1,0,5)$ spänner upp $\mathbb{R}^3$.

(a) Fyra vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ spänner upp V om och endast om varje vektor $\bar{u}$ i V kan skrivas som
$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3 + k_4\bar{v}_4 \quad \text{för några } k_1, k_2, k_3, k_4.$$

(b) Vi ska avgöra om ekvationen
$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 + x_4\bar{v}_4 = \bar{u}$$
är lösbar för varje högerled $\bar{u} = (a,b,c)$:
$$x_1\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}-1\\0\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\3 & -1 & 4 & 0\\4 & 2 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

Totalmatris:
$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 2 & -1 & a\\3 & -1 & 4 & 0 & b\\4 & 2 & 2 & 5 & c\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 2 & -1 & a\\0 & 2 & -2 & 3 & b-3a\\0 & 6 & -6 & 9 & c-4a\end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 2 & -1 & a\\0 & 2 & -2 & 3 & b-3a\\0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{c-4a-3(b-3a)}_{=c-3b+5a}\end{array}\right]$$

Sista raden $\Leftrightarrow 0 = c-4a-3(b-3a) = c-3b+5a$.
Ekvationen är alltså bara lösbar om $c-3b+5a=0$. Alltså är det inte sant att ekvationen alltid går att lösa, dvs vektorerna spänner <u>inte</u> upp $\mathbb{R}^3$.

(a) Vad innebär det att vektorn $\bar{u}$ har koordinatvektorn (a,b,c) i basen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$?

(b) Vad är koordinatvektorn för $\bar{u} = (3,1,2)$ i basen $\{(1,2,0), (0,1,2), (2,0,1)\}$ för $\mathbb{R}^3$?

Lösning (a). $\bar{u}$ har koordinatvektorn (a,b,c) i basen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ $\Leftrightarrow$

$$\bar{u} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3.$$

(b) Bestäm koordinatvektorn (a,b,c):

$$\bar{u} = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Totalmatris: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 4z = -5 \\ 9z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 3 - 2z = 3 - 2 \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3} \\ y &= -5 + 4z = -5 + 4 \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3} \\ z &= 12/9 = 4/3 \end{aligned}$$

Koordinatvektorn blir alltså $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

④ 4.5

Välj ut tre av följande vektorer så att vi får en bas för $\mathbb{R}^3$:

$(1,2,-3)$, $(2,4,-6)$, $(0,0,0)$, $(3,7,1)$, $(4,9,-2)$, $(0,2,20)$, $(1,3,5)$

Lösning: Observera att $(0,0,0)$ ej kan ingå i en bas. Vidare är $(1,2,-3)$ och $(2,4,-6)$ parallella, så högst en av vektorerna kan ingå i en bas. Stryk $(2,4,-6)$.

$\Big\}$ enbart för att förenkla problemet!

Kvar:

$(1,2,-3)$, $(3,7,1)$, $(4,9,-2)$, $(0,2,20)$, $(1,3,5)$

Matris med vektorerna som kolonner:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\2&7&9&2&3\\-3&1&-2&20&5\end{bmatrix}$$

Radoperationer påverkar inte linjära oberoenden mellan kolonnerna!

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\2&7&9&2&3\\-3&1&-2&20&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\0&1&1&2&1\\0&10&10&20&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

De inringade kolonnerna 1, 2, 5 är linjärt oberoende. Motsvarande kolonner i A ger tre vektorer som löser problemet:

$(1,2,-3)$, $(3,7,1)$, $(1,3,5)$

Obs: Det finns många andra lösningar.

(4) ✓
4.6

Låt $B = \{\bar{v}_1 = (1,4),\ \bar{v}_2 = (2,5)\}$
$C = \{\bar{w}_1 = (3,6),\ \bar{w}_2 = (4,7)\}$

(a) Bestäm övergångsmatrisen P från basen B till basen C; $P[\bar{u}]_B = [\bar{u}]_C$

(b) Anta att $\bar{u}$ har koordinatvektorn $(1,2)$ i basen B. Vad blir koordinatvektorn i basen C?

Lösning (a) Låt E vara standardbasen. Vi har då att

$$\overbrace{P_{C\to E}}^{\text{känd}} P_{B\to C} = \overbrace{P_{B\to E}}^{\text{känd}}$$

Ty $P_{C\to E} B_{B\to C}[\bar{u}]_B = P_{C\to E}[\bar{u}]_C = [\bar{u}]_E$

Nu är $P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ och $P_{C\to E} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Vi ser att $P_{C\to E} P_{B\to C} = P_{B\to E}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} P_{B\to C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P_{B\to C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $[\bar{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [u]_C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

Kontroll: $\bar{u} = \underbrace{\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2}_{\text{i basen } B} = (1,4) + 2(2,5) = (5,14)$

samma!

$\bar{u} = 7\bar{w}_1 - 4\bar{w}_2 = 7(3,6) - 4(4,7) = (5,14)$

Svar: (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm dimensionen till delrummet till $\mathbb{R}^7$ bestående av alla lösningar till systemet $A\bar{x} = \bar{0}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Vilken är matrisens rang?

<u>Lösning</u> (a) Notera att A är på trappstegsform. Den allmänna lösningen till $A\bar{x} = \bar{0}$ har en parameter för varje <u>fri</u> variabel, alltså varje variabel vars motsvarande kolumn saknar ledande etta:

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\text{ledande}} & & & \text{ledande} & & \text{ledande} & \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \boxed{\text{fri}} & \boxed{\text{fri}} & & \boxed{\text{fri}} & & \boxed{\text{fri}} \end{array}$$

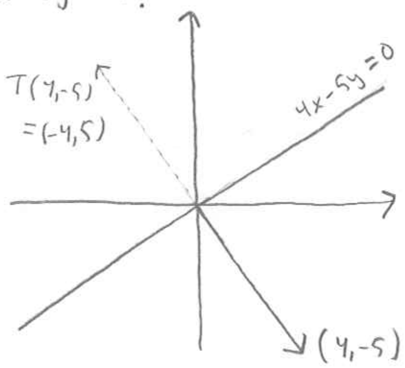
<u>Fyra</u> fria variabler gör att delrummet har dimension <u>fyra</u>

Svar: 4.

(b) Rangen = antal ledande variabler = 3

Svar: 3

Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $4x - 5y = 0$.
Bestäm standardmatrisen för T.



Lösning. Vi kan skriva linjen som

$$(4,-5)\cdot(x,y) = 0$$

Punkter på linjen avbildas på sig själva.
Exempel: $(5,4)$. $T(5,4) = (5,4)$

Punkter längs normalens riktning avbildas på minus sig själva.
Exempel: $(4,-5)$ $T(4,-5) = -(4,-5) = (-4,5)$

Låt A vara standardmatrisen. Då blir

$$A\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \quad \& \quad A\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}, \text{ dvs}$$

$$A\underbrace{\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & -5\end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}5 & -4\\4 & 5\end{bmatrix}}_{C} \iff AB = C \iff A = CB^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{5\cdot(-5) - 4\cdot 4}\begin{bmatrix}-5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix} = \frac{1}{-41}\begin{bmatrix}-5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & -5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad CB^{-1} = \begin{bmatrix}5 & -4\\4 & 5\end{bmatrix}\frac{1}{41}\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & -5\end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix}9 & 40\\40 & -9\end{bmatrix}$$

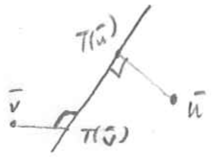
Alltså är den sökta matrisen $\frac{1}{41}\begin{bmatrix}9 & 40\\40 & -9\end{bmatrix}$

(4) V

4.9

Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $(x,y,z) = t(2,-1,3)$

Bestäm standardmatrisen för T.



Lösning 1. Sätt $\bar{a} = (2,-1,3)$. Vi har då att

$$T(\bar{u}) = \text{proj}_{\bar{a}}\,\bar{u} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2}\,\bar{a} = \frac{(u_1,u_2,u_3)\cdot(2,-1,3)}{2^2+1^2+3^2}(2,-1,3)$$

$$= \frac{2u_1 - u_2 + 3u_3}{14}(2,-1,3)$$

Vad gör T på basvektorer?

$$T(1,0,0) = \frac{2}{14}(2,-1,3) = \frac{1}{14}(4,-2,6)$$

$$T(0,1,0) = -\frac{1}{14}(2,-1,3) = \frac{1}{14}(-2,1,-3)$$

$$T(0,0,1) = \frac{3}{14}(2,-1,3) = \frac{1}{14}(6,-3,9)$$

Standardmatrisen blir $\Big[\,[T(1,0,0)]\ \ [T(0,1,0)]\ \ [T(0,0,1)]\,\Big]$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Låt $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $3x+5y-z=0$

Detta innebär att $\boxed{T(\bar{u}) = (\bar{u}\cdot\bar{v}_1)\bar{v}_1 + (\bar{u}\cdot\bar{v}_2)\bar{v}_2}$, där $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ är en ortonormal bas för planet $3x+5y-z=0$

(a) Bestäm en ortonormal bas för planet $3x+5y-z=0$

(b) Bestäm standardmatrisen för T.

Lösning (a) Planet på parameterform: $3x+5y-z=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3s+5t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = s(1,0,3) + t(0,1,5)$$

En bas för planet är alltså $\{(1,0,3), (0,1,5)\}$

Gram-Schmidt ger ortogonal bas:

$\bar{u}_1 = (1,0,3) \quad \bar{u}_2 = (0,1,5)$

$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (1,0,3)$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2\cdot\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 = (0,1,5) - \frac{(0,1,5)\cdot(1,0,3)}{1^2+0^2+3^2}(1,0,3)$$

$$= (0,1,5) - \frac{15}{10}(1,0,3) = (0,1,5) - \frac{3}{2}(1,0,3) = \left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-3,2,1)$$

Ortonormal bas: Normering ger $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}}(1,0,3) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3) \\ \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}(-3,2,1) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1) \end{cases}$

Bas: $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3), \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)\right\}$

(b) Vi får att $T(\bar{u}) = \left(\bar{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)\right)\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3) + \left(\bar{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)\right)\frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)$

$$= \frac{1}{10}(u_1+3u_3)(1,0,3) + \frac{1}{14}(-3u_1+2u_2+u_3)(-3,2,1)$$

$$\Rightarrow \quad T(1,0,0) = \frac{1}{10}(1,0,3) + \frac{1}{14}(-3)(-3,2,1) = \frac{1}{70}(52,-30,6)$$

$$T(0,1,0) = 0 + \frac{2}{14}(-3,2,1) = \frac{1}{70}(-30,20,10)$$

$$T(0,0,1) = \frac{3}{10}(1,0,3) + \frac{1}{14}(-3,2,1) = \frac{1}{70}(6,10,68)$$

$$\Leftrightarrow \quad [T] = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 52 & -30 & 6 \\ -30 & 20 & 10 \\ 6 & 10 & 68 \end{bmatrix}$$

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -4 \end{bmatrix}$ (a) Hitta en diagonalmatris D så att $D = P^{-1}AP$ för någon matris P (du behöver inte beräkna P) (b) Beräkna A^{99}.

Lösning (a) Vi har att

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 3 & -10 & \lambda+4 \end{vmatrix} \overset{(-3)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & -1-3\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} (1-\lambda)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4+(\lambda-3)(1-\lambda) & -2+(1-\lambda) \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & -1-3\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+4\lambda-\lambda^2 & -(1+\lambda) \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & -1-3\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1+4\lambda-\lambda^2 & -(\lambda+1) \\ -1-3\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1+4\lambda-\lambda^2 & -1 \\ -1-3\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)\left(1+4\lambda-\lambda^2-(1+3\lambda)\right) = -(\lambda+1)(\lambda-\lambda^2)$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda) = (\lambda+1)\lambda(\lambda-1)$$

Detta är 0 om $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ eller $\lambda = -1$.

Tre olika egenvärden med multiplicitet 1.

$\Rightarrow$ Finns bas av egenvektorer: $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$: $A\bar{u} = \bar{0}$ $A\bar{v} = \bar{v}$, $A\bar{w} = -\bar{w}$.

Låt P vara matrisen med kolonner $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Då är $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Alltså är $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ en diagonalmatris med önskade egenskaper.

(b) $P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$,

så $A^{99} = (PDP^{-1})^{99} = PD^{99}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 0^{99} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{99} & 1 \\ 0 & 0 & (-1)^{99} \end{bmatrix} P^{-1}$

$$= P \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D} P^{-1} = PDP^{-1} = A, \text{ så}$$

$$A^{99} = A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hitta en matris P så att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris D, och bestäm D.

<u>Lösning</u> $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

kofaktorutveckla

$= (\lambda-3)\left((\lambda-1)(\lambda-4)+2\right) = (\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+6)$

$\lambda^2-5\lambda+6=0 \iff \lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

Så $\lambda = 3$ eller $\lambda = 2$.

Egenvärden: $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 2$

<u>Egenvektorer</u> till egenvärdet 3: $(A-3I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -2x+y+2z=0$

$\iff \begin{cases} x = s \\ y = 2s-2t \\ z = t \end{cases} \iff (x,y,z) = s(1,2,0) + t(0,-2,1)$

Två linjärt oberoende vektorer: <u>$(1,2,0)$, $(0,-2,1)$</u>

Egenvärdet 2:

$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

dvs $\begin{cases} x-y=0 \\ 0=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \iff (x,y,z) = t(1,1,0)$

Egenvektor: $(1,1,0)$. En bas av egenvektorer är alltså $\{(1,2,0), (0,-2,1), (1,1,0)\}$

Sätt $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Vi får att $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Uttryck vektorn $\bar{u}=(1,1,1,1)$ i basen B för delrummet W till $\mathbb{R}^4$, där W ges av ekvationen $x_1+x_2+x_3=3x_4$, och

$$B=\Big\{\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{10}}(3,0,0,1)}_{\bar{w}_1},\ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{110}}(-1,10,0,3)}_{\bar{w}_2},\ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{132}}(-1,-1,11,3)}_{\bar{w}_3}\Big\}$$

<u>Lösning</u> Vi har att

$$\bar{u}=\langle\bar{u},\bar{w}_1\rangle\bar{w}_1+\langle\bar{u},\bar{w}_2\rangle\bar{w}_2+\langle\bar{u},\bar{w}_3\rangle\bar{w}_3$$

Nu är

$$\langle\bar{u},\bar{w}_1\rangle=(1,1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(3,0,0,1)=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\langle\bar{u},\bar{w}_2\rangle=(1,1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{110}}(-1,10,0,3)=\frac{12}{\sqrt{110}}$$

$$\langle\bar{u},\bar{w}_3\rangle=(1,1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{132}}(-1,-1,11,3)=\frac{12}{\sqrt{132}}$$

Koordinatvektorn i basen B för $\bar{u}$ är alltså

$$\left(\frac{4}{\sqrt{10}},\frac{12}{\sqrt{10}},\frac{12}{\sqrt{132}}\right)$$

6 V

6.3

Bestäm en ortonormal bas för det delrum W till $\mathbb{R}^4$ som ges av lösningsmängden till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_4$

Lösning Först hittar vi en bas för W. Vi ser att

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3x_4 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{r+s+t}{3} \end{cases} \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) = r(1,0,0,\tfrac{1}{3}) + s(0,1,0,\tfrac{1}{3}) + t(0,0,1,\tfrac{1}{3})$$

En bas ges alltså av $\{(1,0,0,\tfrac{1}{3}), (0,1,0,\tfrac{1}{3}), (0,0,1,\tfrac{1}{3})\}$

Enklare: $\{\underbrace{(3,0,0,1)}_{\bar{u}_1}, \underbrace{(0,3,0,1)}_{\bar{u}_2}, \underbrace{(0,0,3,1)}_{\bar{u}_3}\}$

Ortogonalisera med Gram-Schmidt:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (3,0,0,1)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 = (0,3,0,1) - \frac{(0,3,0,1)\cdot(3,0,0,1)}{9+1}(3,0,0,1)$$

$$= (0,3,0,1) - \frac{1}{10}(3,0,0,1) = \frac{1}{10}(-3,30,0,9) = \frac{3}{10}(-1,10,0,3)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2}\bar{v}_2 = (0,0,3,1) - \frac{(0,0,3,1)\cdot(3,0,0,1)}{10}(3,0,0,1)$$

$$- \frac{(0,0,3,1)\cdot\frac{3}{10}(-1,10,0,3)}{(\frac{3}{10})^2(1^2+10^2+3^2)}\frac{3}{10}(-1,10,0,3)$$

$$= (0,0,3,1) - \frac{1}{10}(3,0,0,1) - \frac{3}{110}(-1,10,0,3)$$

$$= (0,0,3,1) - \frac{1}{10}(3,0,0,1) - \frac{3}{110}(-1,10,0,3)$$

$$= \frac{1}{110}(-30,-30,330,90) = \frac{1}{11}(-3,-3,33,9) = \frac{3}{11}(-1,-1,11,3)$$

Ortogonal bas: $\{(3,0,0,1), (-1,10,0,3), (-1,-1,11,3)\}$

Ortonormal bas: $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{110}}(-1,10,0,3), \frac{1}{\sqrt{132}}(-1,-1,11,3)$

$\uparrow$
$1^2+1^2+11^2+3^2$

En boll kastas ut från ett högt torn. Man beräknar sedan hur långt bollen fallit efter 1, 2 och 3 sekunder, se tabell.

tid t	sträckan s
1	8
2	26
3	53

Enligt en modell är

$$s = \frac{t^2}{2} \cdot g + t \cdot v_0$$

där $\begin{cases} g = \text{tyngdaccelerationen} \\ v_0 = \text{bollens utgångshastighet vertikalt i m/s} \end{cases}$

(a) Ange ett ekvationssystem för g och v_0 med värden på s och t från tabellen.

(b) Bestäm en 2x2-matris M och en vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ så att lösningen $\begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix}$ till ekvationen $M\begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ är en minstakvadratlösning till ekvationen i (a)

Lösning. (a) Mätvärdena i tabellen ger ekvationerna

$$\begin{cases} 8 = \frac{1^2}{2} g + 1 \cdot v_0 = \frac{1}{2} g + v_0 \\ 26 = \frac{2^2}{2} g + 2v_0 = 2g + 2v_0 \\ 53 = \frac{3^2}{2} g + 3v_0 = \frac{9}{2} g + 3v_0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9/2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 53 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

(b) Minstakvadratlösningen till systemet i (a) är lika med lösningen till ekvationen

$$A^T A \begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = A^T \bar{b}$$

Nu är

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9/2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49/2 & 36 \\ 36 & 28 \end{bmatrix} = M$$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 589/2 \\ 219 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Lösningen är alltså $M = \begin{bmatrix} 49/2 & 36 \\ 36 & 28 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 589/2 \\ 219 \end{bmatrix}$

(Lösningen till $M\begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ är $\begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 181/19 \\ 129/38 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9{,}53 \text{ m/s}^2 \\ 3{,}39 \text{ m/s} \end{bmatrix}$)

Vilken typ av andragradskurva är

$$Q = 3x^2 - 6xy + y^2 - 1 = 0 \ ?$$

Skriv Q på huvudaxelform. (De nya axlarna behöver inte beräknas)

<u>Lösning.</u> $Q = 3x^2 - 6xy + y^2 - 1 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1$

Egenvärden: $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1) - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 6$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \iff \lambda = 2 \pm \sqrt{4+6} = 2 \pm \sqrt{10}$$

Egenvärden är alltså $\lambda_1 = \underbrace{2+\sqrt{10}}_{>0}$ $\quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{10}$.

Det finns alltså en ortogonal matris P vars kolumner är egenvektorer till $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ så att $P^T A P = D = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{10} \end{bmatrix}$

Med $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ får vi att

$$Q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1$$

$$= \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - 1 = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - 1$$

$$= (2+\sqrt{10})u^2 - (\sqrt{10}-2)v^2 = 1.$$

På huvudaxelform får vi alltså att $(2+\sqrt{10})u^2 - (\sqrt{10}-2)v^2 - 1 = 0$
$\iff (2+\sqrt{10})u^2 - (\sqrt{10}-2)v^2 = 1$. Detta är en <u>hyperbel</u>

7

7.3

Gör ett koordinatbyte så att andragradskurvan

$$Q = \frac{36}{5}x^2 - \frac{24}{5}xy + \frac{29}{5}y^2 - 36 = 0$$

kommer på huvudaxelform.

Lösning. $Q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36/5 & -12/5 \\ -12/5 & 29/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 36$

Sätt $A = \begin{bmatrix} 36/5 & -12/5 \\ -12/5 & 29/5 \end{bmatrix}$. Egenvärden:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 36/5 & 12/5 \\ 12/5 & \lambda - 29/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 5\lambda - 36 & 12 \\ 12 & 5\lambda - 29 \end{vmatrix} \cdot 3$$

$$= \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 5\lambda & 15\lambda - 75 \\ 12 & 5\lambda - 29 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda - 15 \\ 12 & 5\lambda - 29 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}(5\lambda^2 - 29\lambda - 36\lambda + 180) = \frac{1}{5}(5\lambda^2 - 65\lambda + 180)$$

$$= \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \iff \lambda = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\lambda = 9$ eller $\lambda = 4$

Egenvektorer

$\lambda = 9$: $A - 9I = \begin{bmatrix} 36/5 - 9 & -12/5 \\ -12/5 & 29/5 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/5 & -12/5 \\ -12/5 & -16/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix}$

dvs $(A - 9I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{cases} -9x - 12y = 0 \\ -12x - 16y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4t \\ y = -3t \end{cases} \iff (x, y) = t(4, -3)$

$\lambda = 4$: $A - 4I = \begin{bmatrix} 16/5 & -12/5 \\ -12/5 & 9/5 \end{bmatrix}$ $\quad (A - 4I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

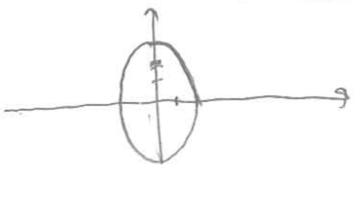
$\iff \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} 16x - 12y = 0 \\ -12x + 9y = 0 \end{matrix} \iff \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -4x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}$

$\iff (x, y) = t(3, 4)$

Normering ger egenvektorerna $\frac{1}{5}(4, -3)$ och $\frac{1}{5}(3, 4)$.

Gör nu koordinatbytet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Vi får då att

$Q = 0$ övergår i $9u^2 + 4v^2 = 36 \iff \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} = 1$. Ellips med axellängder 2 och 3



(a) Bestäm alla a och b så att matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ blir positivt definit.

(b) För vilka värden på a och b har vi att $x^2+y^2+z^2+2axy+2bxz>0$ för alla nollskilda (x,y,z)?

Lösning: Ska ha att determinanten av övre vänstra $k\times k$-matrisen är positiv för alla k:

1×1: $1>0$

2×2: $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1-a^2>0 \iff a^2<1$

3×3: $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-a^2-b^2>0 \iff a^2+b^2<1$

Svar: A är positivt definit om och endast om $a^2+b^2<1$

(b) Vi har att $x^2+y^2+z^2+2axy+2bxz$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

dvs $x^2+y^2+z^2+2axy+2bxz>0$ för alla $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ om och endast om $a^2+b^2<1$.

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha egenskapen att $\begin{cases} T(1,3) = (2,1) \\ T(2,2) = (1,4) \end{cases}$

Bestäm standardmatrisen för inversen T^{-1}

Lösning. $T(1,3) = (2,1)$ innebär att $T^{-1}(2,1) = (1,3)$

$T(2,2) = (1,4)$ innebär att $T^{-1}(1,4) = (2,2)$

Standardmatrisen A för T^{-1} uppfyller alltså

$$A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \iff A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot 4 - 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså är standardmatrisen $A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$

Kontroll: $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = T^{-1}(2,1)$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

8 ✓

8.4

Låt $B = \{(2,1),(1,4)\}$

$C = \{(1,1,2),(1,2,0),(0,2,1)\}$

Låt $T(x,y) = (x,\ x+y,\ x+2y)$

Uttryck matrisen för T i baserna B och C: $[T]_{C,B}[\bar{u}]_B = [T(\bar{u})]_C$

Lösning. Först beräknar vi T av basvektorerna i B:

$$T(2,1) = (2,3,4)$$
$$T(1,4) = (1,5,9)$$

Sedan försöker vi uttrycka dessa element i basen C. Ta en allmän vektor (a,b,c), uttryckt i standardbasen. För att få ut koordinatvektorn i basen C, använder vi oss av formeln

$$[\bar{u}]_C = P_{E\to C}[\bar{u}]_E = P_{E\to C}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Vi läser av $P_{E\to C}^{-1} = P_{C\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↑ ↑ ↑
basvektorer i C

Invertering:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

Alltså är $P_{E\to C} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Detta ger att $[T(2,1)]_C = [(2,3,4)]_C = P_{E\to C}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$

$$[T(1,4)]_C = [(1,5,9)]_C = P_{E\to C}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/5 \\ -10/5 \\ 15/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Den sökta matrisen är alltså $[T]_{C,B} = \begin{bmatrix} 9/5 & 3 \\ 1/5 & -2 \\ 2/5 & 3 \end{bmatrix}$

Låt V vara ett 2-dimensionellt vektorrum med bas $B = \{\bar{u}, \bar{v}\}$.
Anta att $T: V \to V$ är en linjär avbildning som uppfyller

$$\begin{cases} T(\bar{u}) = \bar{u} + 2\bar{v} \\ T(\bar{v}) = 8\bar{u} + \bar{v} \end{cases}$$

(a) Bestäm matrisen för T i basen B, dvs $[T]_{B,B}$

(b) Hitta alla (x, y) sådana att $x\bar{u} + y\bar{v}$ är en egenvektor till T, dvs

$$T(x\bar{u} + y\bar{v}) = \lambda (x\bar{u} + y\bar{v})$$

för något λ.

<u>Lösning</u> (a) Låt $A = [T]_{B,B}$. Vi har att

$$A = \begin{bmatrix} [T(\bar{u})]_B & [T(\bar{v})]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{u} + 2\bar{v}]_B & [8\bar{u} + \bar{v}]_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $T(x\bar{u} + y\bar{v}) = \lambda(x\bar{u} + y\bar{v})$

$$\Leftrightarrow \underset{\uparrow}{A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ egenvektor till } A$$

$[x\bar{u} + y\bar{v}]_B$

Bestäm A:s egenvärden:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -8 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 16$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 16 = \lambda^2 - 2\lambda - 15$$

$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$, så $\lambda = 5$ eller $\lambda = -3$

$\lambda = 5$: $(5I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2x + 4y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = t(2, 1)$

$\lambda = 3$ $(-3I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -2x - 4y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = t(-2, 1)$

Svar: Om $(x, y) = (2t, t)$ för något $t \neq 0$, är $x\bar{u} + y\bar{v}$ egenvektor med egenvärde 5.
Om $(x, y) = (-2t, t)$ för något $t \neq 0$, är $x\bar{u} + y\bar{v}$ egenvektor med egenvärde -3.