Vektorrum (avsnitt 4.1)

Kom ihåg: $\mathbb{R}^n$ är mängden av alla n-tupler $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, där $v_1, \ldots, v_n$ är reella tal. Vi kan addera vektorer: $\bar{u} + \bar{v}$

Vi kan multiplicera en skalär till en vektor: $k\bar{v}$

Andra mängder med liknande egenskaper:

Exempel 1: Mängden av $n \times n$-matriser, exempelvis 2×2-matriser. Vi kan addera två matriser och få en ny matris:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Vi kan multiplicera en skalär till en matris och få en ny matris:

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

Exempel 2: Mängden av lösningar $\bar{x}$ till ett <u>homogent</u> linjärt ekvationssystem $A\bar{x} = \bar{0}$.

Låt $\bar{x}_1$ och $\bar{x}_2$ vara två lösningar: $A\bar{x}_1 = \bar{0}$, $A\bar{x}_2 = \bar{0}$.

Då är $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ också en lösning:

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = \bar{0} + \bar{0}$$

Likaså är $k\bar{x}_1$ en lösning för varje skalär, ty

$$A(k\bar{x}_1) = k(A\bar{x}_1) = k\bar{0} = \bar{0}.$$

Dessa och andra exempel har så mycket gemensamt att man har infört ett samlingsnamn: <u>vektorrum</u>

Ett vektorrum är en struktur bestående av följande:

- En mängd V av element kallade <u>vektorer</u>.
- En regel för att addera två vektorer i V
- En regel för att multiplicera en skalär till en vektor.

I ett vektorrum V måste addition uppfylla följande axiom för alla $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ i V

(1) $\bar{u} + \bar{v}$ ligger i V

(2) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

(3) $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

I ett vektorrum gäller följande för <u>nollvektorn</u> $\bar{0}$:

(4) $\bar{0}$ tillhör V, och $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ för alla $\bar{u}$ i V

(5) För varje $\bar{u}$ i V finns en vektor $-\bar{u}$ sådan att $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

I ett vektorrum måste multiplikation med skalär uppfylla följande axiom för alla skalärer k och m och alla $\bar{u}, \bar{v}$ i V:

(6) $k\bar{u}$ ligger i V

(7) $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

(8) $(k+m)\bar{u} = k\bar{u} + m\bar{u}$

(9) $k(m\bar{u}) = (km)\bar{u}$

(10) $1\bar{u} = \bar{u}$

etta

Exempel: $\mathbb{R}^n$ med sedvanlig addition och skalärmultiplikation är ett vektorrum.

Exempel: Mängden V av par (x,y) sådana att $x+y=1$ är inte ett vektorrum. Följande axiom gäller inte för $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ i V.

1. $(x_0,y_0)+(x_1,y_1)$ ligger inte i V:

$$(x_0,y_0)+(x_1,y_1)=(\overbrace{x_0+x_1}^{x},\overbrace{y_0+y_1}^{y}), \text{ och}$$

$$\underbrace{(x_0+x_1)}_{x}+\underbrace{(y_0+y_1)}_{y}=\underbrace{(x_0+y_0)}_{=1}+\underbrace{(x_1+y_1)}_{=1}=1+1=2\neq 1.$$

ty (x_0,y_0) och (x_1,y_1) tillhör V

4. $\bar{0}=(0,0)$ tillhör inte V: $0+0=0\neq 1$

6. $k(x_0,y_0)$ tillhör inte V då $k\neq 1$:

$$k(x_0,y_0)=(\underbrace{kx_0}_{x},\underbrace{ky_0}_{y}), \text{ och } \underbrace{kx_0}_{x}+\underbrace{ky_0}_{y}=k\underbrace{(x_0+y_0)}_{=1}=k\neq 1$$

Exempel: Mängden av $m\times n$-matriser (för fixa m och n) är ett vektorrum. "Nollvektorn" är nollmatrisen.

Gäller alltid i vektorrum: $\underset{\text{tal}}{0}\,\underset{\text{vektor}}{\bar{u}}=\underset{\text{vektor}}{\bar{0}}$, $k\bar{0}=\bar{0}$, $(-1)\bar{u}=-\bar{u}$.

Inte alldeles lätt att visa direkt från axiomen, se sidan 177.

Delrum (avsnitt 4.2)

Låt V vara ett vektorrum. En delmängd W till V är ett delrum till V om W också är ett vektorrum med samma addition och multiplikation som V.

Sats En icketom delmängd W till ett vektorrum V är ett delrum till V (och alltså ett vektorrum) om och endast om axiom 1 och 6 gäller för W:

(a) (axiom 1): $\bar{u}+\bar{v}$ ligger i W för alla $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i W.
(b) (axiom 6): $k\bar{u}$ ligger i W för alla $\bar{u}$ i W och alla skalärer k.

Anledning att vi bara behöver kolla axiom 1 och 6:

- Axiomen 2, 3, 7, 8, 9, 10 gäller automatiskt i W, ty de gäller i V.
- Axiom 4: $\bar{0}$ tillhör W, ty det finns ett $\bar{u}$ i W, och $0\bar{u}$ tillhör W enligt axiom 6. $0\bar{u}=\bar{0} \Rightarrow \bar{0}$ tillhör W.
- Axiom 5: Om $\bar{u}$ tillhör W, så gäller att $-\bar{u}$ tillhör W, ty $(-1)\bar{u}=-\bar{u}$, och $(-1)\bar{u}$ tillhör W enligt axiom 6

Exempel: Låt $\bar{a} = (a, b, c)$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$, och låt W vara mängden av alla $\bar{x} = (x, y, z)$ sådana att

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = 0 \iff ax + by + cz = 0$$

Då är W ett delrum till $\mathbb{R}^3$:

(a) (axiom 1): Anta att $\bar{x}_1$ och $\bar{x}_2$ tillhör W. Då är
$\bar{a}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \bar{a}\bar{x}_1 + \bar{a}\bar{x}_2 = 0 + 0 = 0$, så $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ tillhör W.

(b) (axiom 6): Anta att $\bar{x}$ tillhör W. Då är
$\bar{a} \cdot (k\bar{x}) = k(\bar{a} \cdot \bar{x}) = k0 = 0$, så $k\bar{x}$ tillhör W.

Låt $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$ vara vektorer i ett vektorrum V.
En vektor $\bar{u}$ är en <u>linjärkombination</u> av $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$ om det finns skalärer $k_1, \ldots, k_r$ sådana att

$$\bar{u} = k_1\bar{w}_1 + \cdots + k_r\bar{w}_r.$$

Mängden W av alla linjärkombinationer av $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$ är ett delrum till V:

(a) (axiom 1) Om $\begin{cases} \bar{u} = k_1\bar{w}_1 + \cdots + k_r\bar{w}_r \\ \bar{v} = m_1\bar{w}_1 + \cdots + m_r\bar{w}_r \end{cases}$, så får vi att

$$\bar{u} + \bar{v} = (k_1 + m_1)\bar{w}_1 + \cdots + (k_r + m_r)\bar{w}_r,$$

så $\bar{u} + \bar{v}$ är en linjärkombination av $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$.

(b) (axiom 6) Om $\bar{u} = c_1\bar{w}_1 + \cdots + c_r\bar{w}_r$, så får vi att

$$k\bar{u} = (kc_1)\bar{w}_1 + \cdots + (kc_r)\bar{w}_r,$$

så $k\bar{u}$ är en linjärkombination av $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$

Vi skriver $W = \text{span}\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r\}$ och säger att $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_r$ <u>spänner upp</u> W.

<u>Exempel</u> Låt W vara mängden av lösningar (x_1, x_2, x_3, x_4) till följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 \quad\quad + x_4 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Sätter vi $x_2 = s$ och $x_4 = t$, får vi $\begin{cases} x_1 = 4s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = 3t \\ x_4 = t \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (4s-t, s, 3t, t) \\ &= (4s, s, 0, 0) + (-t, 0, 3t, t) \\ &= s(4,1,0,0) + t(-1,0,3,1) \end{aligned}$$

W är alltså delrummet till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $(4,1,0,0)$ och $(-1,0,3,1)$:

$$W = \operatorname{span}\{(4,1,0,0), (-1,0,3,1)\}$$

Mer allmänt: Lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem $A\bar{x} = \bar{0}$ är ett delrum till $\mathbb{R}^n$, där n = antal kolumner i matrisen A.

Exempel: Spänner vektorerna $(1,2,3)$, $(-1,0,1)$ och $(0,2,4)$ upp $\mathbb{R}^3$?

Lösning: Detta skulle innebära att varje (a,b,c) $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som en linjärkombination $(a,b,c) = x(1,2,3) + y(-1,0,1) + z(0,2,4)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Detta är lösbart för varje högerled om och endast om determinanten är nollskild. Dock är $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [\text{räkna}] = 0$. $\boxed{\text{Svar: NEJ!}}$

Linjärt oberoende (avsnitt 4.3)

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ är linjärt oberoende om ekvationen

$$x_1\bar{v}_1 + \dots + x_r\bar{v}_r = \bar{0}$$

har som enda lösning den triviala lösningen $(x_1, \dots, x_r) = (0, \dots, 0)$.
Annars är vektorerna linjärt beroende

Exempel: $(1,2,3)$, $(-1,0,1)$ och $(1,4,7)$ är linjärt beroende, ty

$$2(1,2,3) + (-1,0,1) - (1,4,7) = (2-1-1, 4+0-4, 6+1-7) = (0, 0, 0)$$

Att $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ är linjärt beroende innebär alltså att det finns en nollskild vektor $(x_1, \dots, x_r)$ sådan att

$$x_1\bar{v}_1 + \dots x_r\bar{v}_r = \bar{0}$$

Något x_i, säg x_1, är alltså nollskilt. Lös ut $\bar{v}_1$:

$$x_1\bar{v}_1 = -x_2\bar{v}_2 - \dots - x_r\bar{v}_r \iff \bar{v}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\bar{v}_2 - \dots - \frac{x_r}{x_1}\bar{v}_r$$

Slutsats: $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ är linjärt beroende om och endast om någon vektor $\bar{v}_i$ kan skrivas som en linjärkombination av övriga vektorer.

Exempel: $2(1,2,3) + (-1,0,1) - (1,4,7) = (0,0,0)$

$$\iff (1,2,3) = -\tfrac{1}{2}(-1,0,1) + \tfrac{1}{2}(1,4,7)$$

Exempel: Avgör om $(1,0,-3,1)$, $(2,1,0,3)$ och $(3,1,2,4)$ är linjärt oberoende.

Lösning: Vi vill avgöra om det finns nollskild vektor (x,y,z) så att

$$x(1,0,-3,1)+y(2,1,0,3)+z(3,1,2,4)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Högerledet är noll och påverkas inte av radoperationerna.)

Vi får alltså $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vilket bara har den triviala lösningen $(x,y,z)=(0,0,0)$. Alltså är vektorerna linjärt oberoende.

En ensam vektor $\bar{u}$ är linjärt oberoende om och endast om $\bar{u}\neq\bar{0}$. Då har nämligen ekvationen $x\bar{u}=\bar{0}$ bara den triviala lösningen $x=0$.

Två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är linjärt oberoende om och endast de <u>inte</u> är parallella: $\bar{u}\neq k\bar{v}$ och $\bar{v}\neq k\bar{u}$ för alla k.

En mängd med fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt <u>beroende</u>: $x_1\bar{v}_1+\ldots+x_r\bar{v}_r=\bar{0}$ (i $\mathbb{R}^n$) är ett system med r obekanta $x_1,\ldots,x_r$ och n ekvationer. $r>n \Rightarrow$ oändligt många lösningar.

Baser (avsnitt 4.4)

$B = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n\}$ är en bas för vektorrummet V om varje $\bar{u}$ i V kan skrivas på ett unikt sätt som

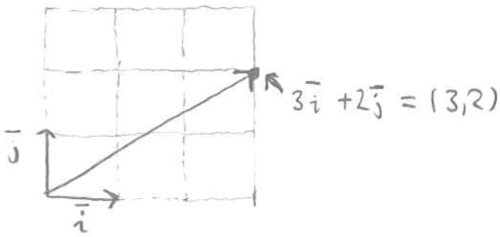
$$\bar{u} = k_1\bar{w}_1 + \cdots + k_n\bar{w}_n$$

Vi skriver $(\bar{u})_B = (k_1, \ldots, k_n)$. Detta är koordinatvektorn för $\bar{u}$ i basen B.

Exempel: $\bar{i} = (1,0)$ och $\bar{j} = (0,1)$ utgör standardbasen i $\mathbb{R}^2$

Koordinatvektorn för en vektor $\bar{u} = (a,b)$ i denna bas är just (a,b):

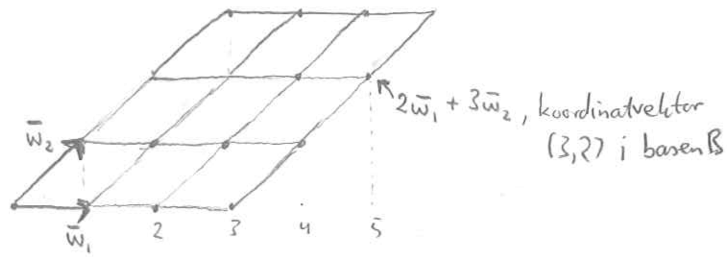
$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a\bar{i} + b\bar{j}.$$



Annat exempel: $B = \{\bar{w}_1 = (1,0),\ \bar{w}_2 = (1,1)\}$

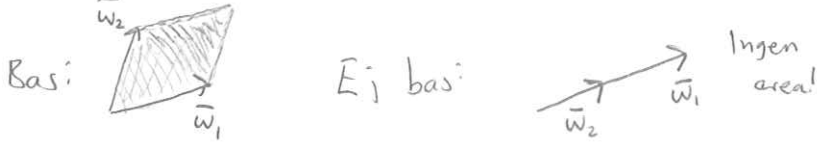
Att en vektor $\bar{u}$ har koordinatvektorn (a,b) i basen B, innebär att

$$\bar{u} = a\bar{w}_1 + b\bar{w}_2$$
$$= a(1,0) + b(1,1)$$
$$= (a+b,\ b)$$



Exempelvis har vi att om $(\bar{w})_B = (3,2)$, så är $\bar{u} = (3+2, 2) = (5,2)$

Bas i $\mathbb{R}^2$: Två vektorer som spänner upp ett parallellogram med icke-tom area.



Förklaring: Två vektorer (a,b) och (c,d) utgör en bas om och endast om ekvationen $x(a,b)+y(c,d)=(s,t)$ har en unik lösning för varje högerled (s,t):

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

Sant precis då matrisen $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ är inverterbar, dvs $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $ad-bc \neq 0$. $|ad-bc|$ är arean av parallellogrammet:

Faktum: En bas $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ till V är en <u>linjärt oberoende</u> mängd som <u>spänner upp V</u>.

- <u>Linjärt oberoende</u>, ty $x_1\bar{v}_1+\dots+x_n\bar{v}_n=\bar{0}$ har bara den triviala lösningen $(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)$
- <u>Spänner upp V</u>, ty varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$.

Standardbasen i $\mathbb{R}^n$: $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,\dots,1)$

Exempel i $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Låt A vara en $n\times n$-matris med kolonner $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$:

$A=\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast

om $x_1\bar{v}_1+\dots+x_n\bar{v}_n=\bar{b}$ har unik lösning för varje $\bar{b}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\bar{b}$ —"— —"—

$\Leftrightarrow$ $A\bar{x}=\bar{b}$ har unik lösning för varje högerled $\bar{b}$

$\Leftrightarrow$ A är inverterbar, dvs $\det A \neq 0$.

Exempel: Avgör om $\{(1,-2,4),(1,3,9),(1,-4,16)\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Enligt ovan är detta en bas om och endast om matrisen

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&3&-4\\4&9&16\end{bmatrix}$$ är inverterbar, dvs $\det A\neq 0$. Vi har nu att

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&3&-4\\4&9&16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&5&-2\\0&5&12\end{vmatrix}=5\cdot 12-(-2)\cdot 5$$
$$=60+10=70\neq 0.$$

Alltså utgör vektorerna en bas.

Låt $B=\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ vara en bas för V.

Räkneregler för koordinatvektorn $(\bar{u})_B$ i basen B för vektorn $\bar{u}$:

$$\begin{cases}(\bar{u}+\bar{w})_B=(\bar{u})_B+(\bar{v})_B\\(k\bar{u})_B=k(\bar{u})_B\end{cases}$$

Koordinatvektorn $(\bar{u})_B=(k_1,\dots,k_n)$ har alltså egenskapen att

$$\bar{u}=k_1\bar{v}_1+\dots+k_n\bar{v}_n$$

Exempel, Hitta koordinatvektorn för vektorn $(2,17,-13)$ i basen $B=\{(1,-2,4),(1,3,9),(1,-4,16)\}$.

Lösning: Vi vill hitta (x,y,z) så att

$$(2,17,-13)=x(1,-2,4)+y(1,3,9)+z(1,-4,16)$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&3&-4\\4&9&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\17\\-13\end{bmatrix}$$ Totalmatris: $\begin{bmatrix}1&1&1&2\\-2&3&-4&17\\4&9&16&-13\end{bmatrix}$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&5&-2&21\\0&5&12&-21\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&5&-2&21\\0&0&14&-42\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\\z=-3\end{cases}$$

räkna på själva

Slutsats: $(2,17,-13)_B=(2,3,-3)$