Determinanter (avsnitt 2.1-2.3)

Till varje kvadratisk matris A kan man associera ett tal, determinanten av A. Detta tal är nollskilt om och endast om A är inverterbar.

2×2-fallet. En 2×2-matris $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar precis då uttrycket $ad-bc$ är nollskilt. I så fall ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Determinanten av $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är talet $ad-bc$. Vi skriver $\det(A)$ eller $|A|$ för att beteckna determinanten

Exempel: $$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 5\cdot(-7) - 8\cdot 3 = -35-24 = -59$$

$$\begin{vmatrix} 100 & 33 \\ 303 & 100 \end{vmatrix} = 100\cdot 100 - 33\cdot 303 = 10000 - 9999 = 1$$

Låt r vara en skalär. Då är $\boxed{\det(rA) = r^2 \det A}$

Bevis: $\det(rA) = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} = (ra)(rd) - (rb)(rc) = r^2(ad-bc) = r^2 \det A$

Produktregel: $\boxed{\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)}$

Om A är inverterbar, så gäller att $\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$

Bevis. $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A\cdot A^{-1}) = \det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, det vill säga $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$. Vi ser att $\det A = 5\cdot 11 - (-3)\cdot 7 = 76$, så

$$A^{-1} = \frac{1}{76}\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observera att $\det A^{-1} = \left(\frac{1}{76}\right)^2 (11\cdot 5 - 3\cdot(-7)) = \left(\frac{1}{76}\right)^2 76$

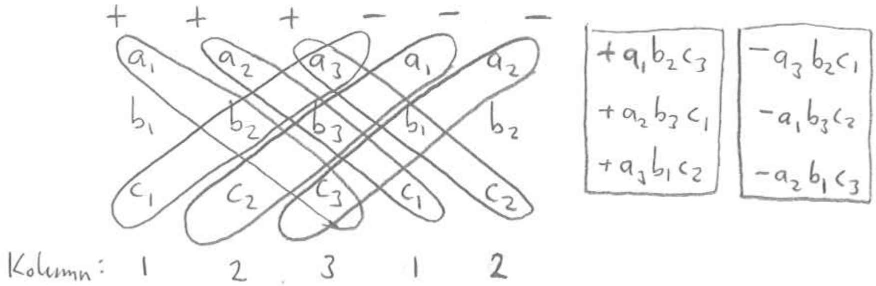
$$= \frac{1}{76} = \frac{1}{\det A}$$

<u>3×3-fallet</u>. Låt $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

Vi definierar $\det A = |A| = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$

Man kan visa att A är inverterbar precis då $\det A \neq 0$.

Sarrus' regel:



Denna regel gäller <u>enbart</u> i 3×3-fallet.

<u>Exempel</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A &= 1\cdot 3\cdot 16 + (-2)\cdot 9\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot(-4) - 4\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 9\cdot(-4) - (-2)\cdot 1\cdot 16 \\ &= 48 - 18 - 16 - 12 + 36 + 32 = 70 \end{aligned}$$

Låt r vara en skalär. Vi har att $\boxed{\det(rA) = r^3 \det A}$

<u>Bevis</u> Varje term i $\det rA$ är på formen

$$(ra_i)(rb_j)(rc_k) = r^3 \underbrace{a_ib_jc_k}_{\text{term i det } A} = r^3\cdot(\text{term i det } A)$$

Elementära radoperationer ger en metod att beräkna determinanten.

Vi studerar här de olika operationerna påverkar determinanten

★ Multiplikation av en konstant r till en rad:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ rb_1 & rb_2 & rb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\text{räkna själva}] = r \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (exempel med rad 2)

Motsvarande matrismultiplikation:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ rb_1 & rb_2 & rb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{EA}$$

Observera att $\det E = r$, så $\underbrace{\det E}_{r} \det A = \underbrace{\det EA}_{r\det A}$

★ Byte av rader:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\text{räkna själva}] = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (exempel med rad 1 och 2)

Motsvarande multiplikation:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{EA}$$

$\det E = -1$, så $\underbrace{\det E}_{-1} \det A = \underbrace{\det EA}_{-\det A}$

★ Addition av en multipel av en rad till en annan rad:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ra_1 & b_2+ra_2 & b_3+ra_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\text{räkna själva}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (exempel med rad 1 → rad 2)

Motsvarande multiplikation:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ra_1 & b_2+ra_2 & b_3+ra_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{EA}$$

$\det E = 1$, så $\underbrace{\det E}_{1} \det A = \underbrace{\det EA}_{\det A}$

Determinantberäkning med radoperationer:

$$\begin{vmatrix} 3 & 11 & -6 \\ 1 & 3 & 10 \\ 7 & 24 & 21 \end{vmatrix}\begin{matrix} \circlearrowleft \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 3 & 11 & -6 \\ 7 & 24 & 21 \end{vmatrix}\begin{matrix} \textcircled{\scriptsize -3} \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & -36 \\ 7 & 24 & 21 \end{vmatrix}\begin{matrix} \textcircled{\scriptsize -7} \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & -36 \\ 0 & 3 & -49 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow \textcircled{\scriptsize \frac{1}{2}} \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 3 & -49 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \textcircled{\scriptsize -3} \\ \leftarrow \end{matrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \textcircled{\scriptsize 1/5} \end{matrix} \sim -2\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -10$$

Determinanten av en triangulär matris = produkten av diagonalelementen.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3.$$

Produktregel: $\det(AB) = \det A \det B$.

<u>Bevis</u>. Om A är inverterbar, kan vi skriva A som en produkt av elementära matriser: $A = E_1 E_2 \cdots E_k$. Produktregeln gäller för elementära matriser, så

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) = \det(E_1(E_2 \cdots E_k B))$$

$$= \det E_1 \cdot \det(E_2(E_3 \cdots E_k B)) = \det E_1 \det E_2 \det(E_3 \cdots E_k B)$$

$$= \cdots = \det E_1 \det E_2 \cdot \ldots \cdot \det E_k \det B$$

$$= \det E_1 E_2 \cdots E_k) \det B = \det A \det B$$

Om A inte är inverterbar, så är AB inte heller inverterbar. Anta nämligen att $(AB)C = I$. Då är $A(BC) = I$, motsägelse. Alltså är $\det(AB) = 0 = \underbrace{\det A}_{=0} \det B$.

Allmänna n×n-matriser

Notera först följande för 3×3-matriser:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Låt M_{rk} = determinanten av den 2×2-matris som erhålls om vi stryker rad r eller kolumn k. Formeln kan nu skrivas

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 M_{11} - a_2 M_{12} + a_3 M_{13}$$

Tydligare: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Låt $n \geq 2$, och anta att vi har definierat determinanten av $(n-1)\times(n-1)$-matriser. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

M_{rk} = determinanten av den erhållna $(n-1)\times(n-1)$-matrisen då man stryker rad r och kolumn k.

M_{rk} är **minoren** för positionen (r,k) i A

Definiera $C_{rk} = (-1)^{rk} M_{rk}$. C_{rk} är plus eller minus M_{rk} beroende på positionen (r,k):

C_{rk} är **kofaktorn** för positionen (r,k) i A.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Definiera determinanten av A att vara

$$\det A = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n}$$

Detta är kofaktorutvecklingen längst första raden.

Exempel:

$$\begin{vmatrix} \boxed{3 \quad 4 \quad 1 \quad 0} \\ 4 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad 3 \quad -2 \quad 1 \\ 2 \quad \underbrace{1 \quad 4 \quad 0} \end{vmatrix} = 3\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{kolumn } 2,3,4} - 4\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{kolumn } 1,3,4} + 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{kolumn } 1,2,4} + 0$$

$$= [\text{räkna på}] = 125$$

Sats: Man kan kofaktorutveckla längs godtycklig rad eller kolumn:

$$\det A = a_{r1}C_{r1} + a_{r2}C_{r2} + \cdots + a_{rn}C_{rn} \quad (\text{rad } r)$$

$$\det A = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (\text{kolumn } k)$$

Viktig konsekvens: $\det A = \det A^T$, där A^T är transponatet till A.

Ännu en viktig konsekvens: Vi kan välja rad eller kolumn på ett smart sätt.

I exemplet ovan kan vi utveckla längs fjärde kolumnen, där vi bara har två nollskilda element:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & \boxed{0} \\ 4 & -3 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 3 & -2 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 4 & \boxed{0} \end{vmatrix} = -0\cdot M_{14} + 2\cdot M_{24} - 1\cdot M_{34} + 0\cdot M_{44} = 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}_{M_{24}} - 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}_{M_{34}}$$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \boxed{-} \\ - & + & - & \boxed{+} \\ + & - & + & \boxed{-} \\ - & + & - & \boxed{+} \end{array}$$

$$= [\text{räkna}] = 125$$

Viktigt resultat: Om A är triangulär, så är $\det(A)$ = produkten av diagonalelementen.

Exempel: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot 5 = 90.$

Räkneregler och fakta:

- $\det(kA) = k^n \det A$ om A är en $n \times n$-matris.
- $\det AB = \det A \det B$ (Theorem 2.3.4)
- Elementära radoperationer fungerar precis som i 3×3-fallet. (Th. 2.2.3-4)
- $\det A \neq 0$ om och endast om A är inverterbar (Th. 2.3.3)
- En matris med en rad med bara nollor har determinant 0. (Th. 2.2.1)

Metod att beräkna inversen till en matris A:

1. Bilda <u>kofaktormatrisen</u> till A: $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

2. Transponatet är <u>adjunkten</u> till A: $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = \text{Adj}(A)$

3. Inversen ges av $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\text{Adj}(A)$ (se Theorem 2.3.6)

<u>Exempel</u>. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & -6 \\ 1 & 3 & 10 \\ 7 & 24 & 21 \end{bmatrix}$. Tidigare beräknade vi $\det(A) = -10$.

Vi har att $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -177 & \boxed{-375} & +128 \\ +49 & +105 & -36 \\ +3 & +5 & -2 \end{bmatrix}$

Exempelvis är elementet på position $(1,2)$ lika med

$$\underset{\text{obs!}\rightarrow}{C_{21}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{udda position}}}{-} M_{21} = -\begin{vmatrix} 11 & -6 \\ 24 & 21 \end{vmatrix} = -(11\cdot 21 + 6\cdot 24) = \boxed{-375}$$

Vi drar slutsatsen att $A^{-1} = -\frac{1}{10}\,\text{Adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 177 & 375 & -128 \\ -49 & -105 & 36 \\ -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$

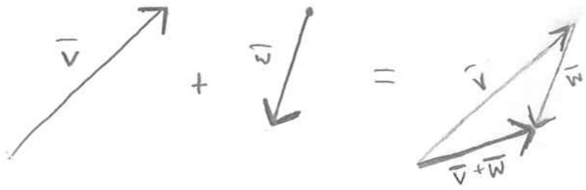
Vektorer (avsnitt 3.1)

En vektor är ett riktat linjesegment med en given startpunkt och slutpunkt

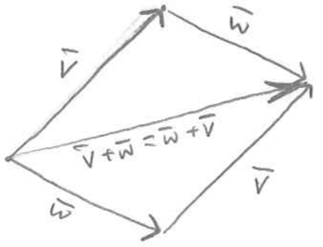
Vektorer med samma längd och riktning betraktas som ekvivalenta.

Vi skriver $\bar{v}=\bar{w}$ om $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är ekvivalenta.

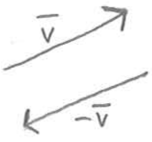
Addition av vektorer:



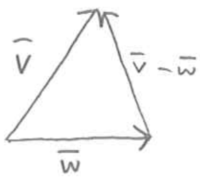
Vi har att $\bar{v}+\bar{w}=\bar{w}+\bar{v}$



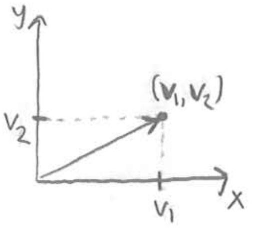
Vi definierar $-\bar{v}$ att vara den vektor vi får om vi byter plats på start- och slutpunkt i $\bar{v}$:



Differensen $\bar{v}-\bar{w}$ är lika med $\bar{v}+(-\bar{w})$:



Punkter i planet kan representeras med koordinater.

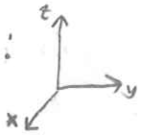


Genom att placera en vektors startpunkt i origo (0,0), kan vi identifiera vektorn med dess slutpunkt.

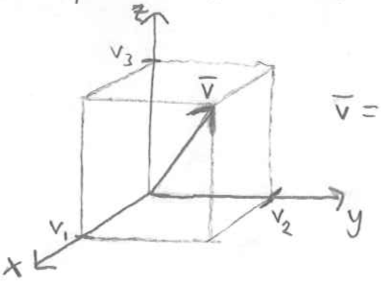
Addition av vektorer: $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

Multiplikation med skalär: $k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2)$

Även rummet kan vi representera punkter med koordinater, Koordinatsystemet består av en x-axel, en y-axel och en z-axel:



Vektorer identifieras med punkter på samma sätt som i planet



$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal.

$\mathbb{R}^n$ är mängden av n-tupler $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ av reella tal.

Element i $\mathbb{R}^n$ kallas fortfarande vektorer.

Exempel. $(1, 2, -4, 0, 5)$ är en vektor i $\mathbb{R}^5$.

Exempel: $\mathbb{R}^2$ är planet och $\mathbb{R}^3$ är rummet.

Räkneregler är som i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ (se Theorem 3.1.1).

En vektor $\bar{w}$ är en linjärkombination av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ om det finns skalärer $k_1, \dots, k_r$ sådana att $\bar{w} = k_1\bar{v}_1 + \cdots + k_r\bar{v}_r$

Exempel: $\underbrace{(-3, 2, 0, 3)}_{\bar{w}} = \underbrace{2}_{k_1} \cdot \underbrace{(0, 4, 3, 6)}_{\bar{v}_1} + \underbrace{(-3)}_{k_2}\underbrace{(1, 2, 2, 3)}_{\bar{v}_2}$.

Norm (avsnitt 3.2)

Normen av en vektor $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ är

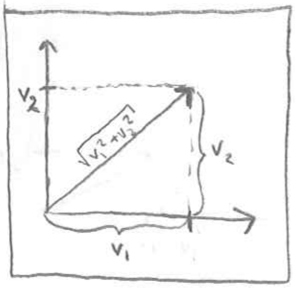
$$\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots v_n^2}$$

Exempel: Normen av $\bar{v} = (1, 5, -3, 8)$ är $\sqrt{1^2+5^2+3^2+8^2} = \sqrt{1+25+9+64}$

$\sqrt{99} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$.

Specialfall:

I $\mathbb{R}^2$ är normen av $\bar{v} = (v_1, v_2)$ lika med $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.
Enligt Pythagoras' sats är detta längden på vektorn $\bar{v}$.



Detsamma gäller i $\mathbb{R}^3$. Längden är alltså lika med normen $\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

Observationer:

* $\|\bar{v}\| \geq 0$, och $\|\bar{v}\| = 0$ enbart då $\bar{v}$ är nollvektorn.
* $\|k\bar{v}\| = |k|\cdot\|\bar{v}\|$ (k är en skalär)

Bevis $\|k\bar{v}\| = \sqrt{(k\bar{v}_1)^2 + \dots + (kv_n)^2} = \sqrt{k^2(v_1^2 + \cdots + v_n^2)}$

$= \sqrt{k^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = |k|\cdot\|\bar{v}\|$.

Glöm inte absolutbeloppet runt k.

Exempel: $\|-\bar{v}\| = |-1|\cdot\|\bar{v}\| = \|\bar{v}\|$

$\bar{v}$ är en enhetsvektor om $\|\bar{v}\| = 1$

Exempel $\bar{v} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ är en enhetsvektor, ty

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4+4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

Normeringen av en nollskild vektor $\bar{v}$ är vektorn $\bar{u} = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$.

Observera att $\|\bar{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v} \right\| = \frac{1}{\|\bar{v}\|}\|\bar{v}\| = 1$, så den normerade vektorn är en enhetsvektor.

Exempel $\bar{v} = (1,-2,3)$. Vi har att $\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$, så normeringen av $\bar{v}$ är lika med $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

En enhetsbasvektor (standard unit vector) är en vektor med en etta och resten nollor.

$\mathbb{R}^2$: $\bar{i} = (1,0)$ $\bar{j} = (0,1)$

$\mathbb{R}^3$: $\bar{i} = (1,0,0)$ $\bar{j} = (0,1,0)$ $\bar{k} = (0,0,1)$

Avståndet mellan två punkter $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ definieras som

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + \cdots + (v_n - w_n)^2}$$

Observera att $d(\bar{v}, \bar{w}) = d(\bar{w}, \bar{v})$

Exempel. Avståndet mellan $(1,-2,3)$ och $(1,0,2)$ är

$$\sqrt{(1-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Skalärprodukt (sid 133)

Skalärprodukten eller den inre produkten (dot product) mellan $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ och $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ är talet

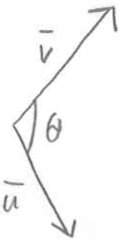
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

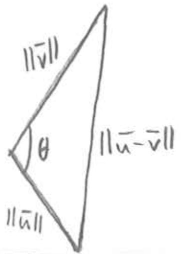
Exempel: $(1, 4, -1, 2) \cdot (2, 0, 1, 3) = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3$
$= 2 + 0 - 1 + 6 = 7$

Vi ser att $\bar{u} \cdot \bar{u} = u_1^2 + \cdots + u_n^2 = \|\bar{u}\|^2$

Alltså är

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$$





Geometrisk tolkning i planet och rummet: Låt θ vara vinkeln mellan vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ (nollskilda). Då är

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \cdot \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

Specialfall: $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ om och endast om $\theta = \frac{\pi}{2}$ (90°)

Bevis

Cosinussatsen ger att $\|\bar{v} - \bar{u}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cos\theta$
$(c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)$

Alltså har vi att $2\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos\theta = -\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 + \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$

Utveckla högerledet: $-\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 + \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 = -\left((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2\right)$
$+ (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$
$= [\text{räkna}] = 2u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 2u_3 v_3 = 2\,\bar{u} \cdot \bar{v}$

Slutsats:

$$2\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cos\theta = 2\bar{u} \cdot \bar{v} \iff \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cos\theta = \bar{u} \cdot \bar{v}$$

$$\iff \cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$$

Räkneregler: $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

(sid 136) $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

$k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v}$

$\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$ med likhet endast då $\bar{v} = \bar{0}$

Exempel: $(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot \bar{u} - (\bar{u} - \bar{v}) \cdot \bar{v}$

$= \bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} - 2\bar{u} \cdot \bar{v}$

$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v}$

Alltså: $\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} \Leftrightarrow 2\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - \|\bar{u} - \bar{v}\|^2$

Specialfall: $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$. Då får vi $2\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 + 1 - \underbrace{\|\bar{u} - \bar{v}\|^2}_{\geq 0} \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad \bar{u} \cdot \bar{v} \leq 1$

Mer allmänt har vi Cauchy-Schwarz' olikhet:

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|.$$

Alternativ formulering för nollskilda $\bar{u}$ och $\bar{v}$:

$$-1 \leq \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} \cdot \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} \leq 1$$

Triangelolikheten: $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

Bevis $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = [\text{räkna}] = \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} + 2\bar{u} \cdot \bar{v}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} + 2\|u\| \cdot \|v\| = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$

$= (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 \leq (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2$

$\Leftrightarrow \quad \|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

Ortogonalitet (avsnitt 3.3)

Två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är <u>ortogonala</u> om $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$.
I $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ är ortogonal = vinkelrät.

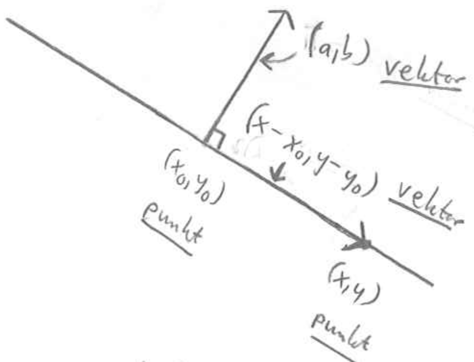
$\mathbb{R}^2$: (a,b) och $(b,-a)$ är ortogonala: $(a,b)\cdot(b,-a)=a\cdot b-b\cdot a=0$.

Låt $ax+by+c=0$ vara ekvationen för en linje, och låt (x_0,y_0) vara en punkt på linjen, dvs $ax_0+by_0+c=0$.
Linjen ges då av ekvationen $\boxed{(a,b)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0}$

<u>Bevis</u>: $(a,b)\cdot(x-x_0,y-y_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)$

$$=ax+by-\underbrace{(ax_0+by_0)}_{=-c}=ax+by-(-c)=ax+by+c.$$

Linjen består alltså av alla punkter (x,y) sådana att vektorn (a,b) är ortogonal mot $(x-x_0,y-y_0)$.
Detta är linjen med <u>normal</u> (a,b)



Exempel: $x+2y-2=0 \Leftrightarrow (1,2)\cdot(x-2,y)=0$.

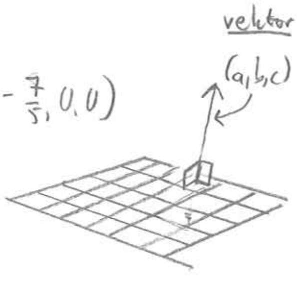
$\mathbb{R}^3$: Låt $ax+by+cz+d=0$ vara ett plan i rummet $\mathbb{R}^3$, och låt (x_0,y_0,z_0) vara en punkt i planet: $ax_0+by_0+cz_0+d=0$.
Planet ges då av ekvationen

$$(a,b,c)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

Planet består alltså av alla punkter (x,y,z) sådana att <u>normalen</u> (a,b,c) är parallell mot $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

Exempel: $\overset{a}{\overset{\downarrow}{5}}x+\overset{b}{\overset{\downarrow}{3}}y\overset{c}{\overset{\downarrow}{\widetilde{-4}}}z+\overset{d}{\overset{\downarrow}{7}}=0$. En punkt i planet är $(-\frac{7}{5},0,0)$
Planet kan alltså skrivas

$$(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{5},\underset{\overset{\uparrow}{b}}{3},\underset{\overset{\uparrow}{c}}{-4})\cdot(x+\tfrac{7}{5},y,z)=0$$

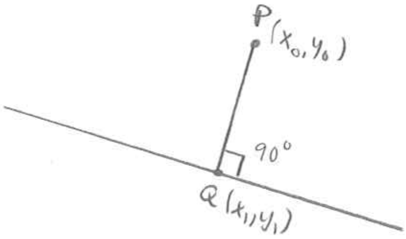


Avstånd mellan punkter, linjer och plan.

Studera en linje $ax+by+c=0$ och en punkt $P(x_0,y_0)$.
Av alla punkter på linjen är följande punkt närmast P:

$$Q(x_1,y_1) = P(x_0,y_0) - \frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}(a,b)$$

Avståndet mellan P och Q är $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Bevis: Först visar vi att $Q(x_1,y_1)$ ligger på linjen. Skriv $K=\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$.
Vi får $\begin{cases} x_1 = x_0 - Ka \\ y_1 = y_0 - Kb \end{cases}$, dvs

$$\begin{aligned} ax_1+by_1+c &= a(x_0-Ka)+b(y_0-Kb)+c \\ &= ax_0+by_0+c-K(a^2+b^2) \\ &= ax_0+by_0+c - \frac{(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}(a^2+b^2) = ax_0+by_0+c-(ax_0+by_0+c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alltså ligger (x_1,y_1) på linjen

Q är den punkt på linjen som är närmast P, för kortaste vägen går vinkelrätt mot linjen, alltså i normalens riktning. Avståndet är

$$\|K(a,b)\| = |K|\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Detta avslutar beviset.

<u>Exempel.</u> $5x-3y+2=0$. Låt $P(x_0,y_0)=(3,7)$. Normalen är $(5,-3)$
Punkten pa linjen närmast P är $(3,7)-\dfrac{5\cdot 3-3\cdot 7+2}{5^2+(-3)^2}(5,-3)=(3,7)-\dfrac{-4}{34}(5,-3)$
$=\left(\dfrac{122}{34},\dfrac{226}{34}\right)=\left(\dfrac{61}{17},\dfrac{113}{17}\right)$
Avståndet till linjen är $\dfrac{|5\cdot 3-3\cdot 7+2|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{34}}=\dfrac{4}{\sqrt{34}}$

Analog formel: Studera ett plan $ax+by+cz+d=0$ och en punkt $P(x_0,y_0,z_0)$. Av alla punkter i planet är följande punkt närmast P:

$$Q(x_1,y_1,z_1) = (x_0,y_0,z_0) - \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$$

Avståndet mellan P och Q är $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exempel: $2x+3y-4z+5=0$ Låt $P(x_0,y_0,z_0)=(1,0,3)$.

Normalen är $(2,3,-4)$, vilket ger att punkten Q närmast P är

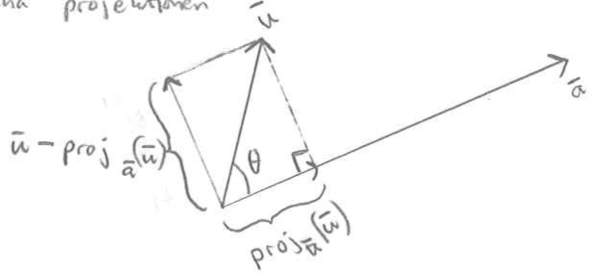
$$(1,0,3) - \frac{2\cdot1+3\cdot0-4\cdot3+5}{2^2+3^2+(-4)^2}(2,3,-4) = (1,0,3) - \frac{-5}{29}(2,3,-4)$$

$$= \frac{1}{29}(39,15,67).$$

Avståndet blir $\dfrac{|2\cdot1+3\cdot0-4\cdot3+5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Ortogonal projektion

Den ortogonala projektionen av en vektor $\bar{u}$ i $\mathbb{R}^n$ på en annan vektor $\bar{a}$ i $\mathbb{R}^n$ erhålls genom att gå ortogonalt (vinkelrätt) från $\bar{u}$ ner till $\bar{a}$.
Vi skriver $\mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u})$ för att beteckna projektionen



Låt θ vara vinkeln mellan $\bar{a}$ och $\bar{u}$.
Trigonometri ger att

$$\|\mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u})\| = \|\bar{u}\||\cos\theta| = \|\bar{u}\| \frac{|\bar{u}\cdot\bar{a}|}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{a}\|} = \frac{|\bar{u}\cdot\bar{a}|}{\|\bar{a}\|}, \text{ så}$$

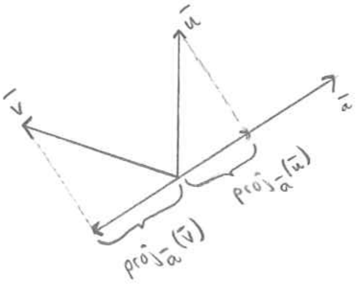
$$\mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u}) = \left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|}\right)\frac{\bar{a}}{\|a\|} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a}.$$

Vektorerna $\mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u})$ och $(\bar{u} - \mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u}))$ är ortogonala:

$$\left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a}\right)\cdot\left(\bar{u} - \frac{\bar{u}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a}\right) = \frac{(\bar{u}\cdot\bar{a})(\bar{a}\cdot\bar{u})}{\|\bar{a}\|^2} - \frac{(\bar{u}\cdot\bar{a})^2}{\|a\|^4}\underbrace{\bar{a}\cdot\bar{a}}_{=\|\bar{a}\|^2}$$

$$= \frac{(\bar{u}\cdot\bar{a})^2}{\|\bar{a}\|^2} - \frac{(\bar{u}\cdot\bar{a})^2}{\|\bar{a}\|^2} = 0.$$

Exempel: Låt $\bar{a} = (3,2)$ och $\bar{u} = (0,3)$. Vi får



$$\mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u}) = \frac{(0,3)\cdot(3,2)}{3^2+2^2}(3,2) = \frac{6}{13}(3,2) = \frac{6}{13}\bar{a}$$

$$\bar{u} - \mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{u}) = (0,3) - \frac{6}{13}(3,2) = \frac{1}{13}(-18,27) = \frac{9}{13}(-2,3)$$

Låt nu $\bar{v} = (-3,1)$. Då blir $\mathrm{proj}_{\bar{a}}(\bar{v}) = \frac{(-3,1)\cdot(3,2)}{3^2+2^2}(3,2) = -\frac{7}{13}(3,2) = -\frac{7}{13}\bar{a}$
Projektionen kan alltså peka i motsatt riktning i förhållande till $\bar{a}$.
Detta gäller om vinkeln mellan $\bar{v}$ och $\bar{a}$ överstiger $\frac{\pi}{2}$ (90°).

Linjer och plan på parameterform

Studera en linje i $\mathbb{R}^2$, säg med ekvationen $y = ax + b$

Parametrisera: $\begin{cases} x = t \\ y = at + b \end{cases}$, t parameter.

På vektorform blir detta $(x, y) = (0, b) + t(1, a)$.

Skriver vi $\bar{x} = (x, y)$, $\bar{x}_0 = (0, b)$ och $\bar{v} = (1, a)$, blir formeln

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{v}$$

Ta nu en godtycklig punkt $\bar{x}_0$ och en godtycklig nollskild vektor $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Då är

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{v}$$

ekvationen för den linje i $\mathbb{R}^n$ som innehåller $\bar{x}_0$ och har riktningen $\bar{v}$.

Exempel Följande ekvationssystem bestämmer en linje i rummet:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 3x + 7y + 4z = 11 \end{cases}$$

Ange denna linje på parameterform.

Lösning. Elimination ger $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -10 \end{array}\right]$

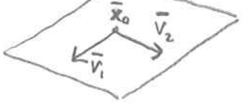
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -15 & 27 \\ 0 & 1 & 7 & -10 \end{array}\right],$$

alltså: $\begin{matrix} x & & -15z = 27 \\ & y & +7z = -10 \end{matrix} \iff \begin{cases} x = 27 + 15t \\ y = -10 - 7t \\ z = t \end{cases}$

$$\iff \boxed{(x, y, z) = (27, -10, 0) + t(15, -7, 1)} \leftarrow \text{sökt parameterform}$$

Motsvarande diskussion för plan: Låt $z = ax + by + c$ vara ett plan i rummet.

Parametrisera: $\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \\ z = at_1 + bt_2 + c \end{cases}$ t_1, t_2 parametrar.



På vektorform blir detta

$$(x, y, z) = (0, 0, c) + t_1(1, 0, a) + t_2(0, 1, b).$$

Med $\bar{x} = (x, y, z)$, $\bar{x}_0 = (0, 0, c)$, $\bar{v}_1 = (1, 0, a)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, b)$ får vi

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2.$$

Låt nu $\bar{x}_0$ vara en godtycklig punkt i $\mathbb{R}^n$, och låt $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ vara två icke-parallella vektorer i $\mathbb{R}^n$. Den allmänna definitionen av ett plan i $\mathbb{R}^n$:

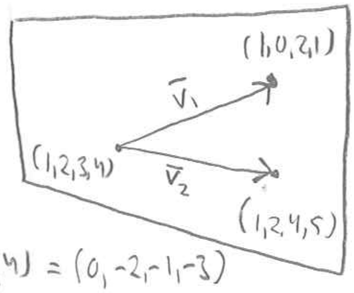
$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2.$$

$\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ <u>spänner</u> planet.

<u>Exempel</u> Skriv på parameterform det plan i $\mathbb{R}^4$ som innehåller punkterna $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 0, 2, 1)$, $(1, 2, 4, 5)$

<u>Lösning</u> Vi behöver en punkt $\bar{x}_0$ i planet och två riktningsvektorer $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ parallella med planet. Välj

$$\bar{x}_0 = (1, 2, 3, 4).$$



Som $\bar{v}_1$ kan vi välja vektorn från $(1,2,3,4)$ till $(1,0,2,1)$: $\bar{v}_1 = (1,0,2,1) - (1,2,3,4) = (0,-2,-1,-3)$

Som $\bar{v}_2$ kan vi välja vektorn från $(1,2,3,4)$ till $(1,2,4,5)$:

$$\bar{v}_2 = (1,2,4,5) - (1,2,3,4) = (0,0,1,1)$$

Planet blir alltså

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,2,3,4) + t_1(0,-2,-1,-3) + t_2(0,0,1,1)$$

Låt $\bar v = (\bar v_1, \bar v_2, \bar v_3)$ och $\bar w = (w_1, w_2, w_3)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Vektorprodukten (cross product) $\bar v \times \bar w$ definieras som

$$\bar v \times \bar w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

$\bar v = (1,2,3), \bar w = (4,5,6)$: $\bar v \times \bar w = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-3, 6, -3)$

Observera i exemplet: $\bar v \cdot (\bar v \times \bar w) = (1,2,3) \cdot (-3,6,-3) = -3 + 12 - 9 = 0$

$\bar w \cdot (\bar v \times \bar w) = (4,5,6) \cdot (-3,6,-3) = -12 + 30 - 18 = 0$

Detta gäller alltid. Anledningen är att

$$\bar u \cdot (\bar v \times \bar w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (\bar u = (u_1, u_2, u_3))$$

ty denna determinant är lika med $u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \underbrace{\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}}_{= - \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$

Två lika rader ger determinant 0.

$\bar u \cdot (\bar v \times \bar w)$ är trippelprodukten av $\bar u, \bar v, \bar w$.

Tillämpning Anta att vi har ett plan i rummet på parameterform:

$$(x,y,z) = (2,3,4) + t_1(-2,-1,-3) + t_2(0,1,1)$$

Problem: Skriv planet på formen $ax + by + cz + d = 0$

Lösning:

Vi behöver bestämma normalen (a,b,c), som ska vara ortogonal mot planet och alltså ortogonal mot $(-2,-1,-3)$ och $(0,1,1)$. En sådan ges av vektorprodukten

$$(-2,-1,-3) \times (0,1,1) = \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$= (2, 2, -2)$. En ekvation för planet blir $2x + 2y - 2z + d = 0$.

Bestäm d: $(2,3,4)$ tillhör planet, så $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

Planets ekvation: $2x + 2y - 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + y - z - 1 = 0}$

Låt θ vara vinkeln mellan $\bar{v}$ och $\bar{w}$. På sidan 164 visas att

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \sin\theta$$

Använd att $\cos\theta = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\|\bar{v}\|\cdot\|\bar{w}\|}$. Detta ger att $\sin^2\theta = 1 - \frac{(\bar{v}\cdot\bar{w})^2}{\|\bar{v}\|^2\cdot\|\bar{w}\|^2}$

$$= \frac{\|\bar{v}\|^2\cdot\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v}\cdot\bar{w})^2}{\|\bar{v}\|^2\cdot\|\bar{w}\|^2} = \frac{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2) - (v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2}{\|\bar{v}\|^2\cdot\|\bar{w}\|^2}$$

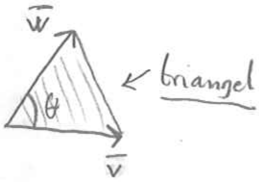
Råräkning ger att detta är lika med

$$\frac{1}{\|\bar{v}\|^2\cdot\|\bar{w}\|^2}\left((v_2w_3-w_2v_3)^2 + (v_3w_1-w_3v_1)^2 + (v_1w_2-w_1v_2)^2\right)$$

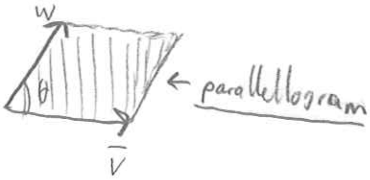
$$= \frac{1}{\|\bar{v}\|^2\cdot\|\bar{w}\|^2}\cdot\|\bar{v}\times\bar{w}\|^2$$

Area-satsen ger att triangeln med sidor $\bar{v}$ och $\bar{w}$ har arean

$$\frac{1}{2}\|\bar{v}\|\cdot\|\bar{w}\|\sin\theta = \frac{1}{2}\|\bar{v}\times\bar{w}\|$$



Arean av parallellogrammet med sidor givna av $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är alltså $\|\bar{v}\times\bar{w}\|$



Exempel:

$\bar{v} = (1,2,3)$, $\bar{w} = (4,5,6)$. Vi såg tidigare att

$\bar{v}\times\bar{w} = (-3, 6, -3)$

Arean av parallellogrammet som ges av $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ är alltså

$$\sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

Specialfall: $\bar{v} = (a,b,0)$, $\bar{w} = (c,d,0)$. Då är $\bar{v}\times\bar{w} = (0, 0, ad-bc)$

Alltså är $|ad-bc|$ arean av parallellogrammet i planet med hörn i origo $(0,0)$, $\underset{\overset{\uparrow}{\bar{v}}}{(a,b)}$, $\underset{\overset{\uparrow}{\bar{w}}}{(c,d)}$, $\underset{\overset{\uparrow}{\bar{v}+\bar{w}}}{(a+c, b+d)}$.