

Ortogonala matriser (avsnitt 7.1)

sid 389

En matris A är ortogonal om $A^{-1} = A^T$, dvs $AA^T = A^T A = I$ Exempel. Låt a och b vara tal sådana att $a^2 + b^2 = 1$. Då är $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ortogonal. Vi har nämligen att

$$A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Exempelvis är matrisen för rotation med vinkeln θ ortogonal: $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

sid 390

Sats A är ortogonal \Leftrightarrow Raderna i A utgör en ortonormal bas för \mathbb{R}^n \Leftrightarrow Kolonnerna i A

$$\text{Exempel: } A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & -1/\sqrt{35} & -3/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{14} & 5/\sqrt{35} & 0 \\ 3/\sqrt{14} & -3/\sqrt{35} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{5} & 5\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{5} & -3\sqrt{2} & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

sid 391

Sats: (a) Om A är ortogonal, så är även $A^{-1} = A^T$ ortogonal(b) Om A och B är ortogonala, så är AB ortogonal.(c) Om A är ortogonal, så $\det A = 1$ eller $\det A = -1$ Exempelvis har vi: (b) att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$

Ortogonal matriser bevarar norm och skalärprodukt:

$$(A\bar{x}) \cdot (A\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad (\text{ty } (A\bar{x}) \cdot (A\bar{y}) = \bar{x}^T \underbrace{A^T A}_I \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y})$$

$$\bar{x} = \bar{y} \text{ ger } \|A\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$$

Endast ortogonala matriser har dessa egenskaper för alla \bar{x} och \bar{y} .

Därför är matriser för speglingar och rotationer ortogonala.

Allmänt säger vi att $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en ortogonal operator om dess matris A är ortogonal.

sid 392-393

Basbyten mellan ortonormala baser är enkla att hantera

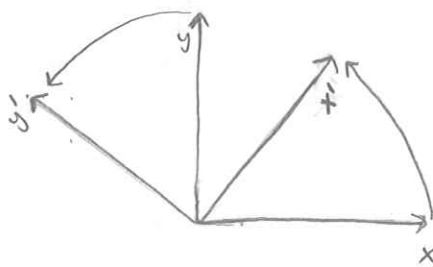
Exempel. Låt $B = \left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\}$ och $E = \left\{ (1,0), (0,1) \right\}$ Då är övergångsmatrisen från B till E lika med

$$P_{B \rightarrow E} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad P_{E \rightarrow B} = (P_{B \rightarrow E})^T = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

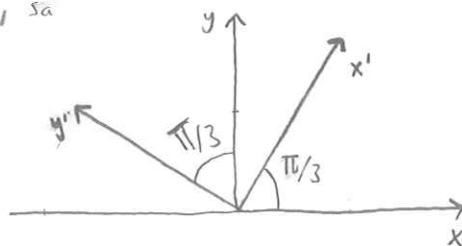
så om \bar{u} har koordinaterna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i basen E ochkoordinaterna $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ i basen B , gäller

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$P_{E \rightarrow B}$ \uparrow basen E \uparrow basen B $P_{B \rightarrow E}$ \uparrow basen B \uparrow basen E

Om $\det P = +1$, utgör basbytet en rotation av koordinatsystemetOm $\det P = -1$, kan vi byta plats på två kolumner i P och på så sätt få en rotation.Om exempelvis $P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, så är $\det P = -1$ Byte av kolumner ger en ny matris $\hat{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, och $\det \hat{P} = +1$ Observera att $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, så

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$



Ortogonal diagonalisering (avsnitt 7.2)

(17)

sid 397

En matris A är ortogonalt diagonaliserbar om det finns en ortogonal matris P sådan att $P^T A P = P^{-1} A P = D$ är en diagonalmatris.

$$\text{Obs: } P^T A P = D \Leftrightarrow P P^T A P P^T = P D P^T \Leftrightarrow A = P D P^T$$

Vi har att varje ortogonalt diagonaliserbar matris A är symmetrisk: $A = A^T$. Bervis:

$$A^T = (P D P^T)^T = \underbrace{(P^T)^T}_{=P} \underbrace{D^T}_{=D} P^T = P D P^T = A.$$

sid 398

Sats Varje symmetrisk matris är ortogonalt diagonaliserbar, och alla egenvärden är reellvärden.

Exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$. Hitta en ortogonal diagonalisering av A .

Lösning: Vi diagonaliserar som i kapitel 5, men vi normerar även alla egenvektorer och ser till att de utgör en ortonormal bas. Karakteristiskt polynom:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 5) - 16 \\ = \lambda^2 + 4\lambda - 5 - 16 = \lambda^2 + 4\lambda - 21$$

Nollställena: $\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm \sqrt{25} = -2 \pm 5$, dvs $\lambda = -7$ och $\lambda = 3$ är nollställena.

Egenvektorer sökes:

$$\lambda = -7 \text{ ger } (-7I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-2t, t) = t(-2, 1)$$

$$\text{Normera: } \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}(-2, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$$

Den ena normerade egenvektorn är alltså $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

Om allt går som det ska, finns en egenvektor som är ortogonal mot denna.

$$\lambda=3 \text{ ger } (3I-A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = t(1,2)$$

Normera: $\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

Mycket riktigt är denna ortogonal mot $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$.

Om vi sätter $P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, får vi att

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ P_{E \rightarrow B} & [A]_{EE} & P_{B \rightarrow E} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{[A]_{B,B}} \end{matrix}$

den nya basen uttryckt i standardbasen

Ännu ett exempel: Låt $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$

Hitta en ortogonal diagonalisering av A .

Lösning: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-10 & 6 & -2 \\ 6 & \lambda-5 & -3 \\ -2 & -3 & \lambda-13 \end{vmatrix} = [\text{räkna, räkna}]$

$$= \lambda^3 - 28\lambda^2 + 196\lambda = \lambda(\lambda^2 - 28\lambda + 196)$$

$$= \lambda(\lambda-14)^2$$

Två egenvärden: $\lambda=14$ och $\lambda=0$

Hitta egenvektorer:

$$\lambda=14 \text{ ger } (14I-A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -2x - 3y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2s + 3t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = s(1,0,2) + t(0,1,3)$$

V_i får därmed två egenvektorer med egenvärde 14:

$\bar{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\bar{u}_2 = (0, 1, 3)$. De är dock inte ortogonala.

Detta ordnar vi med Gram-Schmidt:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (1, 0, 2)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_2 &= \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = (0, 1, 3) - \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{1^2 + 0^2 + 2^2} (1, 0, 2) \\ &= (0, 1, 3) - \frac{6}{5} (1, 0, 2) = \frac{1}{5} (-6, 5, 3)\end{aligned}$$

Två ortogonala egenvektorer: $(1, 0, 2)$ och $(-6, 5, 3)$

Normering ger vektorerna $\frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2)$ och $\frac{1}{\sqrt{36+25+9}} (-6, 5, 3)$
 $= \frac{1}{\sqrt{70}} (-6, 5, 3)$

$$\lambda = 0 \text{ ger } (0 \cdot I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -10 & 6 & -2 \\ 6 & -5 & -3 \\ -2 & -3 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Övning: Detta system har lösningen $(x, y, z) = t(2, 3, -1)$.

En egenvektor är alltså $(2, 3, -1)$.

Normering ger $\frac{1}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, -1)$

En ortonormal bas av egenvektorer ges av

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{70}} (-6, 5, 3), \frac{1}{\sqrt{14}} (2, 3, -1) \right\} \text{ (kontrollera!)}$$

Matrisen $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} & 2/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{70} & 3/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} & -1/\sqrt{14} \end{bmatrix}$ har egenskapen att

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kvadratisken former (avsnitt 7.3)

sid 405-406

En kvadratisk form i \mathbb{R}^2 i variablerna x och y är ett uttryck på formen $ax^2 + by^2 + cxy$, där a, b, c är konstanter.

En kvadratisk form i \mathbb{R}^3 i variablerna x, y och z har formen $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, där a, b, c, d, e, f är konstanter.

Allmänt i \mathbb{R}^n med variablerna x_1, \dots, x_n : En summa av termer på formen $a_{ij}x_i x_j$.

Notera att $ax^2 + by^2 + cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

och $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Omvänt:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by & bx+dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ = ax^2 + byx + bxy + dy^2 = ax^2 + bxy + cy^2$$

För en symmetrisk $n \times n$ -matris A definierar vi

$$Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}.$$

Detta är den kvadratisken formen associerad med A .

sid 407

Vi genomför ett variabelbyte genom formeln $\bar{x} = P\bar{y}$, där

P är en inverterbar $n \times n$ -matris. Notera att

$$\bar{x}^T A \bar{x} = (P\bar{y})^T A (P\bar{y}) = \bar{y}^T P^T A P \bar{y}$$

Anta nu att P är en ortogonal matris som diagonaliserar A , dvs

$$P^T A P = D,$$

där D är en diagonalmatris; $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Då är

$$\begin{aligned} \bar{x}^T A \bar{x} &= \bar{y}^T P^T A P \bar{y} = \bar{y}^T D \bar{y} = \\ &= [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

Exempel. Låt $Q = x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$. Då är

$$Q = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 8/2 \\ 8/2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Tidigare räknade vi ut att $P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ har egenskapen att $P^T A P = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

↑ ↑
egenvektorer till A

$$\text{Sätt } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

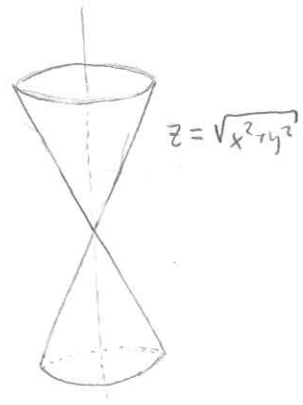
Vi får att

$$\begin{aligned} Q &= \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T (P^T A P) \bar{y} = [y_1 \ y_2] \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= -7y_1^2 + 3y_2^2. \end{aligned}$$

sid 408-409

Kägelsnitt (conics)

Kägelsnitt är kurvor som uppstår när man skär en kägla (se figur till höger) med ett plan.



Exempel på kägelsnitt: Kurvor på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$$

Dessa är centrala kägelsnitt (origo ligger i centrum). Om $b=0$, dvs

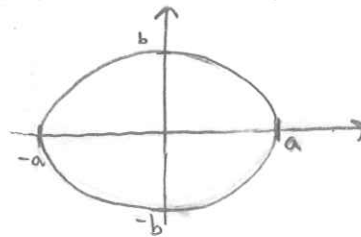
$$ax^2 + cy^2 + d = 0,$$

säger vi att kägelsnittet är på huvudaxelform (in standard position)

Viktiga kägelsnitt i standardposition ($a > 0, b > 0$):

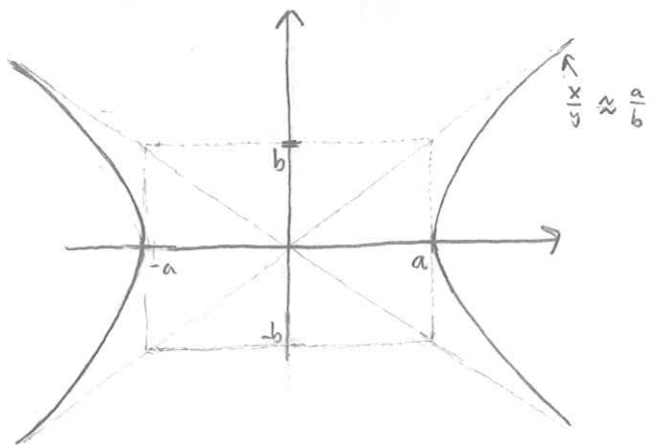
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Detta är en ellips med axellängder a och b :



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Detta är en hyperbel:



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Detta är också en hyperbel (se boken för figur)

Exempel: Avgör vilken typ av kägelsnitt som utgörs av kurvan

$$Q = 14x^2 - 6xy + 6y^2 - 25 = 0$$

Ange kägelsnittet på huvudaxelform via lämpligt koordinatbyte.

Lösning: Vi kan skriva $Q = [x \ y] \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 25$

Sätt $A = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \boxed{6/2} \end{matrix}$

Vi ser att $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & 3 \\ 3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 14)(\lambda - 6) - 9$
 $= \lambda^2 - 20\lambda + 84 - 9 = \lambda^2 - 20\lambda + 75$

Lös $\lambda^2 - 20\lambda + 75 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10 \pm \sqrt{100 - 75} = 10 \pm \sqrt{25}$

$\Leftrightarrow \lambda = 10 \pm 5$, så $\lambda = 15$ och $\lambda = 5$

Egenvektorer: $\lambda = 15$ $15I - A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, och $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow x + 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = t(-3, 1)$

$\lambda = 5$: $5I - A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, och $\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = t(1, 3)$

Egenvektorer: $(-3, 1)$ och $(1, 3)$. Normering ger

$\frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$ och $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$. Sätt $P = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$

Vi får att $P^T A P = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Variabelbytet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ger $Q = [x \ y] A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 25 = [x' \ y'] P^T A P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 25$

$= [x' \ y'] \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 25 = 15(x')^2 + 5(y')^2 - 25$

Alltså: $Q = 0 \Leftrightarrow 15(x')^2 + 5(y')^2 = 25$

$\Leftrightarrow \frac{15}{25}(x')^2 + \frac{5}{25}(y')^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}(x')^2 + \frac{1}{5}(y')^2 = 1$

Detta är en ellips med axellängder $\sqrt{5/3}$ och $\sqrt{5}$.

sid 412-413

Om $\bar{x}^T A \bar{x} > 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$, säger vi att den kvadratiske formen $\bar{x}^T A \bar{x}$ är positivt definit. Detsamma säger vi om matrisen A

Om $\bar{x}^T A \bar{x} \geq 0$ för alla \bar{x} , är formen positivt semidefinit.

Om $\bar{x}^T A \bar{x} < 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$, är formen negativt definit.

Om $\bar{x}^T A \bar{x} \leq 0$ för alla \bar{x} , är formen negativt semidefinit.

Om $\bar{x}^T A \bar{x}$ antar både positiva och negativa värden, är formen indefinit.

Sats: A är positivt definit \Leftrightarrow Alla egenvärden till A är positiva

A är negativt definit \Leftrightarrow Alla egenvärden till A är negativa

A är indefinit \Leftrightarrow Både positiva och negativa egenvärden förekommer.

2x2-matriser: A är positivt definit $\Leftrightarrow \bar{x}^T A \bar{x} = 1$ är en ellips

A är indefinit $\Leftrightarrow \bar{x}^T A \bar{x} = 1$ är en hyperbel.

sid 414 Sats: En symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ är positivt definit precis då

$a > 0$	$\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} > 0$	$\det A > 0$
↑	↑	↑
övre vänstra hörnet	övre vänstra 2x2-matrisen	övre vänstra 3x3-matrisen

Byt ut alla olikheter mot \geq (större än eller lika med) \Leftrightarrow pos. semidefinit

Exempel: För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ positivt definit och positivt semidefinit?

Lösning: Notera först att $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4$ och $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - 5a$.

Ovanstående sats ger att A är positivt definit precis då

$a > 0$, $a^2 - 4 > 0$, $a^3 - 5a > 0$. $a > 0$ ger att $a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 4 \Leftrightarrow a > 2$

och $a^3 - 5a > 0 \Leftrightarrow a^2 > 5a \Leftrightarrow a^2 > 5 \Leftrightarrow a > \sqrt{5}$

A är alltså positivt definit precis då $a > \sqrt{5}$. Samma sats ger att

A är positivt semidefinit precis då $a \geq 0$, $a^2 \geq 4$ och $a^3 \geq 5a$, dvs $a \geq \sqrt{5}$.