Inre produkter (avsnitt 6.1 – 6.2)

Kom ihåg: Skalärprodukten $\bar{u}\cdot\bar{v}$ av $\bar{u}=(u_1,\dots,u_n)$ och $\bar{v}=(v_1,\dots,v_n)$ ges av

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Egenskaper:

(1) $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$

(2) $(\bar{u}+\bar{v})\cdot\bar{w} = \bar{u}\cdot\bar{w} + \bar{v}\cdot\bar{w}$.

(3) $(k\bar{u})\cdot\bar{v} = k(\bar{u}\cdot\bar{v})$

(4) $\bar{v}\cdot\bar{v} \geq 0$ för alla $\bar{v}$, och $\bar{v}\cdot\bar{v}=0$ enbart då $\bar{v}=\bar{0}$.

sid 335-336 En <u>inre produkt</u> på ett vektorrum V är en funktion som associerar ett tal, betecknat $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle$, till varje par av vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i V, så att följande gäller för alla $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ i V och skalärer k:

(1) $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle = \langle\bar{v},\bar{u}\rangle$

(2) $\langle\bar{u}+\bar{v},\bar{w}\rangle = \langle\bar{u},\bar{w}\rangle + \langle\bar{v},\bar{w}\rangle$

(3) $\langle k\bar{u},\bar{v}\rangle = k\langle\bar{u},\bar{v}\rangle$

(4) $\langle\bar{v},\bar{v}\rangle \geq 0$, och $\langle\bar{v},\bar{v}\rangle = 0$ om och endast om $\bar{v}=\bar{0}$.

Ett vektorrum med en inre produkt är ett <u>inre produktrum</u>.

Exempel: Skalärprodukten är en inre produkt. Skalärprodukten brukar kallas för den <u>euklidiska produkten</u>. $\mathbb{R}^n$ försedd med den euklidiska produkten är ett <u>euklidiskt rum</u>.

Exempel. För <u>positiva</u> tal a och b kan vi definiera en <u>viktad</u> euklidisk produkt

$$\langle (u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle = au_1v_1 + bu_2v_2.$$

Denna produkt uppfyller axiomen (1)-(4). Exempelvis har vi att

$$\langle\bar{v},\bar{v}\rangle = av_1^2 + bv_2^2 \geq 0,$$ med likhet bara då $v_1=v_2=0$.

Mer allmän viktad euklidisk produkt i $\mathbb{R}^n$, med $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiva:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = a_1 u_1 v_1 + a_2 u_2 v_2 + \cdots + a_n u_n v_n.$$

Normen av en vektor $\bar{u}$ i ett inre produktrum definieras som

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle}$$

Avståndet mellan två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{u} - \bar{v}, \bar{u} - \bar{v} \rangle}$$

Exempel: Definiera $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2 + 6u_3v_3$.

Normen av $\bar{u} = (1, 2, 3)$ är

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2} = \sqrt{4 + 20 + 54}$$
$$= \sqrt{78}$$

Normen av $\bar{v} = (2, 3, 1)$ är

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2} = \sqrt{16 + 45 + 6}$$
$$= \sqrt{67}$$

Avståndet mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \sqrt{\langle \bar{u} - \bar{v}, \bar{u} - \bar{v} \rangle} = \sqrt{\langle (-1, -1, 2), (-1, -1, 2) \rangle}$$
$$= \sqrt{4 \cdot (-1)^2 + 5(-1)^2 + 6 \cdot 2^2} = \sqrt{4 + 5 + 24} = \sqrt{33}$$

Egenskaper hos inre produktrum:

$$\|\bar{v}\| \geq 0, \quad \|k\bar{v}\| = |k| \, \|\bar{v}\|, \quad d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u}),$$
$$d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0 \quad (\text{och } d(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ bara då } \bar{u} = \bar{v})$$

Annat exempel: Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris.
En inre produkt på $\mathbb{R}^n$ ges då av

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = (A\bar{u}) \cdot (A\bar{v}) = \bar{u}^T A^T A \bar{v}$$

Exempel med $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = [u_1 \; u_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$= [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 10u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1$$

Räkneregler för inre produkter: Se sid 342.

Exempel: $\langle a\bar{u}+b\bar{v}, c\bar{u}+d\bar{v}\rangle$

$$= \langle a\bar{u}, c\bar{u}+d\bar{v}\rangle + \langle b\bar{v}, c\bar{u}+d\bar{v}\rangle$$

$$= \langle a\bar{u}, c\bar{u}\rangle + \langle a\bar{u}, d\bar{v}\rangle + \langle b\bar{v}, c\bar{u}\rangle + \langle b\bar{v}, d\bar{v}\rangle$$

$$= ac\langle \bar{u},\bar{u}\rangle + ad\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + bc\langle \bar{v},\bar{u}\rangle + bd\langle \bar{v}.\bar{v}\rangle$$

$$= ac\,\|\bar{u}\|^2 + ad\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + bc\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + bd\,\|\bar{v}\|^2$$

$$= ac\,\|\bar{u}\|^2 + (ad+bc)\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + bd\,\|\bar{v}\|^2$$

Specialfall då $a=b=c=d=1$: $\langle \bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+\bar{v}\rangle = \|\bar{u}+\bar{v}\|^2$, så

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \|\bar{v}\|^2,$$ kvadreringsregeln!

Annat specialfall:

$$\|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 - 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \|\bar{v}\|^2$$

Observation: Om både $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är normerade ($\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$), så

$$0 \leq \|\bar{u}-\bar{v}\| = \|\bar{u}\|^2 - 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \|\bar{v}\|^2 = 2 - 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leq 1.$$

Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ inte är normerade men nollskilda, får vi

$$\left\langle \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}, \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}\right\rangle \leq 1 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|}\langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leq \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|$$

Från detta kan man även härleda att

$$-\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$$

sid 345 och därmed Cauchy-Schwarz' olikhet: $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$.

(Kom ihåg: $|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$, där $\|\bar{u}\|$ och $\|\bar{v}\|$ betecknar den vanliga normen.)

Triangelolikheten: $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$.
Visas med hjälp av Cauchy-Schwarz' olikhet; se sid 347.

sid 347 Ännu en generalisering: Två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är ortogonala med avseende på den inre produkten om $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$.

Exempel. Låt $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2 + 6u_3v_3$
Låt $\bar{u} = (1, 2, 1)$ $\bar{v} = (2, -3, 4)$, $\bar{w} = (2, 1, -3)$
Vi ser att

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 \cdot 4 = 8 - 30 + 24 = 2$$
$$\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot (-3) = 8 + 10 - 18 = 0$$

$\bar{u}$ och $\bar{w}$ är alltså ortogonala m.a.p. den givna inre produkten, medan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ inte är det.
Studera den vanliga skalärprodukten:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 = 2 - 6 + 4 = 0$$
$$\bar{u} \cdot \bar{w} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Med avseende på denna produkt är alltså $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ortogonala, medan $\bar{u}$ och $\bar{w}$ inte är det.

Läs själva om ortogonalt komplement på sid 349-350

Ortonormala mängder och baser (avsnitt 6.3)

sid 353 En mängd med vektorer $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ i ett vektorrum är <u>ortogonal</u> om $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$ för alla $i \neq j$. Om dessutom $\|\bar{v}_i\| = 1$ för alla i, säger vi att mängden är <u>ortonormal</u>.

Exempel: $\{\overset{\bar{u}_1}{(1,1,1)}, \overset{\bar{u}_2}{(1,-1,0)}, \overset{\bar{u}_3}{(1,1,-2)}\}$ är en ortogonal mängd m.a.p. skalärprodukten:

$\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle = \langle \bar{u}_1, \bar{u}_3 \rangle = \langle \bar{u}_2, \bar{u}_3 \rangle = 0.$

Normering ger

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad \bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$1^2+1^2+(-2)^2$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är en <u>ortonormal</u> mängd.

<u>Sats</u>: En ortogonal mängd med <u>nollskilda</u> vektorer är linjärt oberoende.

Bevis: Anta att mängden är $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$. Om $k_1\bar{v}_1 + \dots + k_m\bar{v}_m = 0$, så är, för varje i,

$$0 = \langle \bar{v}_i, k_1\bar{v}_1 + \dots + k_m\bar{v}_m \rangle = k_1\langle \bar{v}_i, \bar{v}_1 \rangle + \dots + k_m\langle \bar{v}_i, \bar{v}_m \rangle$$
$$= [\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0 \text{ om } i \neq j] = k_i\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle = k_i\|\bar{v}_i\|^2,$$

så $k_i = 0$. Linjärkombinationen $k_1\bar{v}_1 + \dots + k_m\bar{v}_m$ är alltså trivial.

sid 354 En ortonormal mängd som utgör en bas för ett inre produktrum V är en <u>ortonormal bas</u> för V

Faktum: Om $\dim V = n$, så utgör varje ortonormal mängd av storlek n en bas.

Koordinatvektorn för en vektor m.a.p. en ortonormal bas $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$:

$$\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 + \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 + \ldots + \langle \bar{u}, \bar{v}_n \rangle \bar{v}_n.$$

Anta nämligen att $\bar{u} = c_1 \bar{v}_1 + \ldots + c_n \bar{v}_n$.

Då är $\langle \bar{u}, \bar{v}_i \rangle = \langle c_1 \bar{v}_1 + \ldots + c_n \bar{v}_n, \bar{v}_i \rangle = c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \ldots + c_n \langle v_n, v_i \rangle$

$$= c_i \langle v_i, v_i \rangle = c_i$$

Exempel: $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

Ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$ med den Euklidiska produkten.

Låt $\bar{u} = (1,2,3)$

$$\langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)) = \frac{-3}{\sqrt{6}}$$

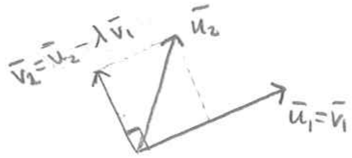
Alltså är $\bar{u} = \frac{6}{\sqrt{3}} \bar{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_2 - \frac{3}{\sqrt{6}} \bar{v}_3$, och koordinatvektorn för $\bar{u}$ i basen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är: $(6/\sqrt{3}, -1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{6})$

sid 358 Viktigt resultat: Varje inre produktrum av ändlig dimension har en ortonormal bas, och vi kan välja en sådan bas så att den innehåller en vektor parallell med en given vektor $\bar{u}$. Vi studerar detta i rum av dimension 2 och 3.

Låt V ha dimension 2, och låt $\bar{u}_1$ vara en godtycklig nollskild vektor i V. Vi vill hitta en ortonormal bas där en vektor parallell med $\bar{u}_1$ ingår.

Lösning: Välj $\bar{u}_2$ godtyckligt så att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ är en bas för V.

Sätt $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$, och flytta ändpunkten för $\bar{u}_2$ parallellt med $\bar{v}_1$ så att resultatet blir ortogonalt mot $\bar{v}_1$:



$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \lambda \bar{v}_1, \quad \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = 0$$

Bestäm λ:

$$\langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = 0 \iff \langle \bar{u}_2 - \lambda \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = 0 \iff \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle - \lambda \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = 0$$

$$\iff \lambda = \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle / \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle$$

Definiera alltså

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1$$

Obs: $\dfrac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1$ är den ortogonala projektionen av $\bar{u}_2$ på $\bar{v}_1$.

En ortonormal bas erhålls genom att normera $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

Exempel: $\bar{u}_1 = (2,1)$, $\bar{u}_2 = (4,3)$, euklidisk produkt. Sätt $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$ och

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = (4,3) - \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{2^2 + 1^2}(2,1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{räkna på}}}{=} \frac{1}{5}(-2,4)$$

En ortogonal bas ges alltså av $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$.

Snygga till genom att byta ut $\frac{1}{5}(-2,4)$ mot $(-2,4)$:

$$\{(2,1), (-2,4)\}$$

Nu är $\|(2,1)\| = \sqrt{5}$ och $\|(-2,4)\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, så en ortonormal bas ges av $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{2\sqrt{5}}(-2,4)\right\}$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right\}.$$

Låt nu V ha dimension 3, och låt $\bar{u}_1$ vara en nollskild vektor. Hitta en ortonormal bas för V där en vektor är parallell med $\bar{u}_1$.

Lösning: Välj $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$ godtyckligt så att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ är en bas för V. Sätt

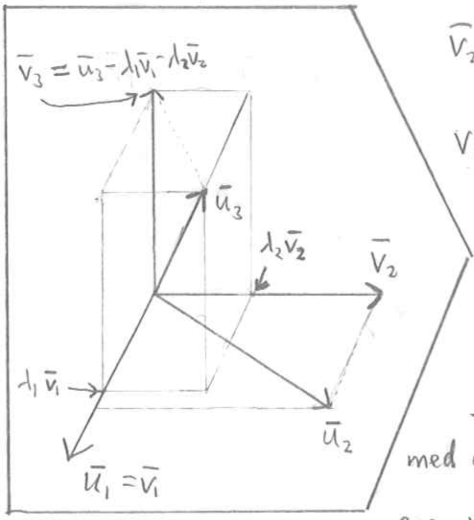
$\boxed{\text{Gram-Schmidts ortogonaliserings-process}}$

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = \bar{u}_3 - \underbrace{\frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1}_{\text{gör } \bar{v}_3 \text{ ortogonal mot } \bar{v}_1} - \underbrace{\frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2}_{\text{gör } \bar{v}_3 \text{ ortogonal mot } \bar{v}_2}$$

$\boxed{\text{Obs! } \bar{v}_2, \text{ inte } \bar{u}_2}$



Exempel: Hitta en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ med euklidisk produkt så att basen innehåller en vektor parallell med $\bar{u}_1 = (1,2,3)$.

Lösning: En bas för $\mathbb{R}^3$ ges av $\{\bar{u}_1 = (1,2,3), \bar{u}_2 = (0,1,0), \bar{u}_3 = (0,0,1)\}$

Vi får

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (1,2,3)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = (0,1,0) - \frac{1 \cdot 2}{1^2+2^2+3^2}(1,2,3)$$

$$= \frac{1}{14}(-2, 10, -6) = \frac{1}{7}(-1,5,-3)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2$$

$$= (0,0,1) - \frac{1 \cdot 3}{14}(1,2,3) - \frac{\frac{1}{7}(1 \cdot (-3))}{(\frac{1}{7})^2((-1)^2+5^2+(-3)^2)} \frac{1}{7}(-1,5,-3)$$

$$= (0,0,1) - \frac{3}{14}(1,2,3) - \frac{-3}{35}(-1,5,-3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{räkna på}}}{=} \frac{1}{70}(-21,0,7)$$

$$= \frac{1}{10}(-3,0,1).$$

En ortogonal bas ges alltså av $\{(1,2,3), (-1,5,-3), (-3,0,1)\}$

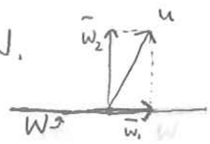
Normering: $\|(1,2,3)\| = \sqrt{14}$, $\|(-1,5,-3)\| = \sqrt{35}$, $\|(-3,0,1)\| = \sqrt{10}$,

så en ortonormal bas är

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3), \frac{1}{\sqrt{35}}(-1,5,-3), \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1)\right\}$$

Sid 356-357 Låt V vara ett inre produktrum, och låt W vara ett delrum till V.

<u>Sats</u> Om W har ändlig dimension, så kan varje $\bar{u}$ i V skrivas unikt som $\bar{u} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, där $\bar{w}_1$ tillhör W och $\bar{w}_2$ tillhör $W^{\perp}$, dvs $\langle \bar{w}_2, \bar{w} \rangle = 0$ för alla $\bar{w}$ i W.



$\bar{w}_1$ är <u>ortogonala projektionen</u> av $\bar{u}$ på W och betecknas $\text{proj}_W \bar{u}$.

Sats. Om $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r\}$ är en ortonormal bas för W, så gäller att

$$\text{proj}_W \bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 + \ldots + \langle \bar{u}_r, \bar{v}_r \rangle \bar{v}_r.$$

Exempel. Låt W vara det delrum till $\mathbb{R}^4$ som ges av $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$. Bestäm en ortonormal bas för W, och beräkna $\text{proj}_W (1,0,0,0)$

<u>Lösning</u> Hitta först en bas för W: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2r - 3s - 4t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \bar{x} = r(-2,1,0,0) + s(-3,0,1,0) + t(-4,0,0,1),$$

så en bas ges av $\bar{u}_1 = (-2,1,0,0)$, $\bar{u}_2 = (-3,0,1,0)$, $\bar{u}_3 = (-4,0,0,1)$

Gram-Schmidt ger en ortonormalbas:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (-2,1,0,0)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = (-3,0,1,0) - \frac{6}{5}(-2,1,0,0) = \frac{1}{5}(-3,-6,5,0)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 = (-4,0,0,1) - \frac{8}{5}(-2,1,0,0)$$

$$- \frac{\frac{1}{5} \cdot 12}{(\frac{1}{5})^2 \underbrace{(9+36+25)}_{70}} \frac{1}{5}(-3,-6,5,0) = \frac{1}{70}(-20,-40,-60,70)$$

↑ räkna!

Alltså: $\bar{v}_3 = \frac{1}{70}(-20,-40,-60,70) = \frac{10}{70}(-2,-4,-6,7)$.

En ortogonal bas ges alltså av

$$\{(-2,1,0,0),(-3,-6,5,0),(-2,-4,-6,7)\}$$

Normering ger

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0),\frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5,0),\underbrace{\frac{1}{\sqrt{105}}}_{\sqrt{2^2+4^2+6^2+7^2}=\sqrt{4+16+36+49}}(-2,-4,-6,7)\right\}$$

$$=\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\}$$

Detta är en ortonormal bas för W.

Den ortogonala projektionen av $\underbrace{(1,0,0,0)}_{\bar{e}_1}$ på W blir

$$\langle \bar{e}_1,\bar{w}_1\rangle\bar{w}_1+\langle e_2,\bar{w}_2\rangle\bar{w}_2+\langle\bar{e}_3,\bar{w}_3\rangle\bar{w}_3$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)+\frac{-3}{\sqrt{70}}\frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5,0)+\frac{-2}{\sqrt{105}}\cdot\frac{1}{\sqrt{105}}(-2,-4,-6,7)$$

$$=-\frac{2}{5}(-2,1,0,0)-\frac{3}{70}(-3,-6,5,0)-\frac{2}{105}(-2,-4,-6,7)$$

$$=[\text{räkna på}]=\frac{1}{30}(29,-2,-3,-4)$$

Notera att $(1,0,0,0)-\frac{1}{30}(29,-2,-3,-4)=\frac{1}{30}(1,2,3,4)$,

och denna vektor är ortogonal mot W.

(Detta ska gälla, för $\bar{e}_1-\mathrm{proj}_W\bar{e}_1$ är ortogonal mot W.)

Om vi normerar $(1,2,3,4)$, får vi vektorn $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{30}}}_{1+4+9+16}(1,2,3,4)$.

Vi får nu en ortonormal bas för $\mathbb{R}^4$, där tre av basvektorerna är en bas för W:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0),\frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5,0),\frac{1}{\sqrt{105}}(-2,-4,-6,7),\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,3,4)\right\}$$

Minsta kvadratmetoden (avsnitt 6.4)

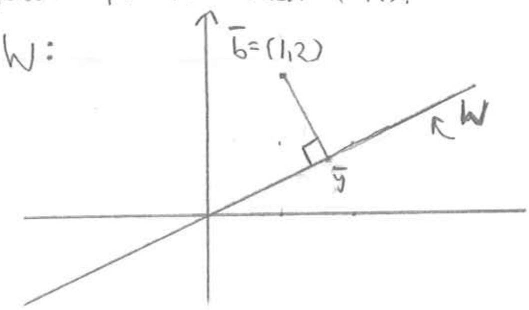
Studera ett inkonsistent ekvationssystem $A\bar{x} = \bar{b}$. Systemet saknar alltså lösning. Vi kan då istället försöka hitta $\bar{x}$ så att avståndet mellan $A\bar{x}$ och $\bar{b}$ är minimalt, dvs $\|\bar{b} - A\bar{x}\|$ är minimalt.

Diskussion: Låt A vara en $m \times n$-matris. Låt W vara delrummet till $\mathbb{R}^m$ bestående av alla $\bar{y}$ som kan skrivas $\bar{y} = A\bar{x}$ för något $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$. Vi vill då hitta $\bar{y}$ i W så att avståndet till $\bar{b}$ är minimalt. Varje $\bar{x}$ sådant att $A\bar{x} = \bar{y}$ har då egenskapen att $\|\bar{b} - A\bar{x}\|$ är minimalt.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ och $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Då har

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{b}$ ingen lösning. W består av alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ på formen $x(2,1) + y(4,2) + z(0,0) = x(2,1) + 2y(2,1)$
$= (x+2y)(2,1)$, dvs alla vektorer parallella med $(2,1)$.

Kortaste avståndet från $\bar{b}$ till W:
Gå ortogonalt från $\bar{b}$ till W.
Den punkt på W som är närmast $\bar{b}$ är alltså



$\bar{y}$ = projektionen av $\bar{b}$ på W

$$= \frac{\bar{b} \cdot (2,1)}{\|(2,1)\|^2}(2,1) = \frac{4}{5}(2,1).$$

$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ är ett exempel på en vektor sådan att $A\bar{x}_0 = \bar{y} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

sid 367 Vi säger att $\bar{x}_0$ är en minstakvadratlösning till $A\bar{x} = \bar{b}$ om $\|\bar{b} - A\bar{x}_0\| \leq \|\bar{b} - A\bar{x}\|$ för alla $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Avståndet $\|\bar{b} - A\bar{x}_0\|$ är lösningens fel (error)

Allmän lösningsmetod:

<u>Sats.</u> Vektorn $\bar{x}_0$ minimerar avståndet $\|\bar{b} - A\bar{x}\|$ om $\bar{b} - Ax_0$ är ortogonal mot varje vektor $\bar{y}$ i W, alltså varje vektor i $\mathbb{R}^m$ på formen $A\bar{x}$.

Anta nämligen att $\langle \bar{b} - A\bar{x}_0 , A\bar{x} \rangle = 0$ för varje $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$.
Då gäller för varje $\bar{x}_1$ i $\mathbb{R}^n$ att

$$\|\bar{b} - A\bar{x}_1\|^2 = \|\bar{b} - A\bar{x}_0 + A\underbrace{(\bar{x}_0 - \bar{x}_1)}_{\bar{x}_2}\|^2$$

$$= \|\bar{b} - A\bar{x}_0 + A\bar{x}_2\|^2$$

(kvadreringsregeln) $= \|\bar{b} - A\bar{x}_0\|^2 + \|A\bar{x}_2\|^2 + \underbrace{2\langle b - A\bar{x}_0 , A\bar{x}_2 \rangle}_{=0}$

$$= \|\bar{b} - A\bar{x}_0\|^2 + \|A\bar{x}_2\|^2$$

$$\geq \|\bar{b} - A\bar{x}_0\|^2$$

Nu har vi att $\langle \bar{b} - A\bar{x}_0 , A\bar{x} \rangle = 0$ för <u>varje</u> $\bar{x}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A\bar{x})^T}_{\substack{x^T A^T \\ m\text{-vektor}}} \cdot \underbrace{(\bar{b} - A\bar{x}_0)}_{m\text{-vektor}} = 0 \quad \text{för } \underline{\text{varje}}\ \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^T}_{n \times m\text{-matris}} \underbrace{(\bar{b} - A\bar{x}_0)}_{m\text{-vektor}} = \underbrace{\bar{0}}_{n\text{-vektor}}$$

$$\Leftrightarrow A^T A \bar{x}_0 = A^T \bar{b}$$

<u>sid 368</u> <u>Sats</u> Varje lösning till systemet $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$ är en minstakvadratlösning till $A\bar{x} = \bar{b}$, och det finns alltid minst en lösning.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ och $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vi får $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 27 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T A \bar{x} = A^T \bar{b} \iff \begin{bmatrix} 30 & 27 \\ 27 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 30 & 27 & 5 \\ 27 & 26 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 27 & 26 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 17 & 25 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{array}{l} 3x + y = -2 \\ 17y = 25 \end{array} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-2-y) = \frac{1}{3}\left(-2 - \frac{25}{17}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{59}{17}\right) = -\frac{59}{51} \\ y = 25/17 \end{cases}$$

En minstakvadratlösning till $A\bar{x} = \bar{b}$ ges alltså av

$$\bar{x} = \left(-\frac{59}{51}, \frac{25}{17}\right)$$

Vi ser att $\bar{b} - A\bar{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jobbiga} \\ \text{uträkningar}}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16/51 \\ 107/51 \\ 5/51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/51 \\ -5/51 \\ -5/51 \end{bmatrix}$

och $\|\bar{b} - A\bar{x}\| = \sqrt{\dfrac{35^2 + (-5)^2 + (-5)^2}{51^2}} = \sqrt{\dfrac{5^2(7^2 + (-1)^2 + (-1)^2}{51^2}}$

$$= \frac{5}{51}\sqrt{51} = \frac{5}{\sqrt{51}} \approx 0{,}70$$

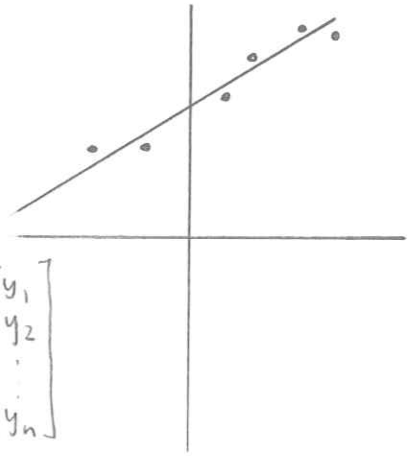
Avsnitt 6.5

sid 376

Tillämpning: Anta att vi har ett antal punkter i $\mathbb{R}^2$:

$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$. (Någon sorts mätdata)

Vi vill hitta en linje $y = a + bx$ så att punkterna ligger så nära linjen som möjligt.



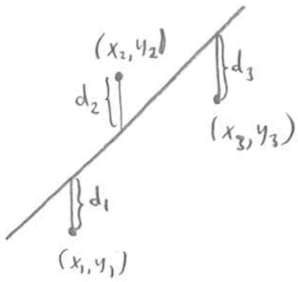
Vi vill alltså hitta a och b så att vi är så nära som möjligt att uppfylla följande ekvationer:

$$\begin{aligned} a + bx_1 &= y_1 \\ a + bx_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ a + bx_n &= y_n \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Sätt $M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$ och $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekvationen blir $M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \bar{y}$.

Minstakvadratlösningen minimerar $\left\| \bar{y} - M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|$.

Detta är $\sqrt{d_1^2 + \ldots + d_n^2}$, där d_i är det vertikala avståndet till linjen från punkten (x_i, y_i) (skillnaden i y-värde)



sid 377-378

Enligt tidigare resultat ges m.k.-lösningen av lösningen $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ till ekvationen $\underbrace{M^TM}_{2\times 2\text{-matris}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M^T\bar{y}$

Exempel: Låt punkterna vara $(1,1), (2,3), (4,6), (7,10)$

Detta ger $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, och

$$M^TM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 70 \end{bmatrix}, \quad M^T\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Ekvationen blir alltså $\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 101 \end{bmatrix} \underset{\text{räkna}}{\iff} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 31/21 \end{bmatrix}$

och linjen blir $y = -\frac{1}{6} + \frac{31x}{21}$