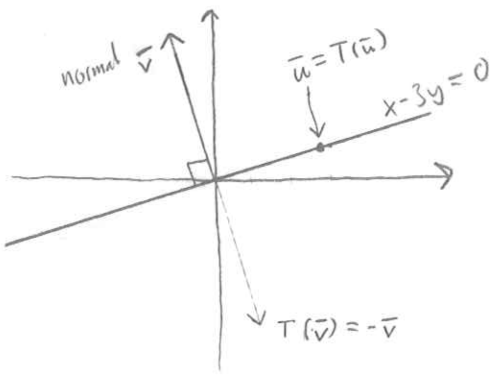
Egenvärden och egenvektorer (5.1–5.2)

Inledande exempel. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i en linje i $\mathbb{R}^2$, säg $x-3y=0$



Punkter $\bar{u}$ på linjen uppfyller

$$T(\bar{u})=\bar{u}.$$

De avbildas på sig själva.

Punkter $\bar{v}$ i normalriktningen uppfyller

$$T(\bar{v})=-\bar{v}$$

De avbildas på minus sig själva.

Punkt på linjen: $\bar{u}=(3,1)$

Punkt i normalriktningen: $\bar{v}=(1,-3)$

Definiera $\mathcal{B}=\{\bar{u},\bar{v}\}=\{(3,1),(1,-3)\}$

Vi ser att $T(\bar{u})=\bar{u}$, dvs $[T(\bar{u})]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$T(\bar{v})=-\bar{v}$, dvs $[T(\bar{v})]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

Detta ger att matrisen för T i basen $\mathcal{B}$ är

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}=\Big[[T(\bar{u})]_{\mathcal{B}}\ \ [T(\bar{v})]_{\mathcal{B}}\Big]=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

Detta är mycket enklare än standardmatrisen för T.

(Denna blir $\begin{bmatrix}4/5&3/5\\3/5&-4/5\end{bmatrix}$.)

Mer allmänt exempel i $\mathbb{R}^3$: Anta att $B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$, och anta att $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har egenskapen att
$T(\bar{u}) = \lambda_1 \bar{u}$, $T(\bar{v}) = \lambda_2 \bar{v}$, $T(\bar{v}_3) = \lambda_3 v_3$.
Då är

$$[T(\bar{u})]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [T(\bar{v})]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Alltså är $$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Anta att vi vill studera T^N för $N \geq 1$ ($T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T \circ T, \ldots$)
Vi får då att

$$[T^N]_{B,B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{räkneregel}}}{=} \left([T]_{B,B}\right)^N = \begin{bmatrix} \lambda_1^N & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^N & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^N \end{bmatrix}$$

T^N blir alltså enkel att studera i basen B.

sid 295: En nollskild vektor $\bar{u}$ är en egenvektor till $n \times n$-matrisen A (och till motsvarande avbildning T_A) om $A\bar{u} = \lambda \bar{u}$ ($T_A(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$) för någon skalär λ. Talet λ är egenvärdet som hör till egenvektorn $\bar{u}$.

Observation: Anta att $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$. Detta kan skrivas

$$A\bar{x} = \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enhetsmatrisen}}}{I} x \iff (\lambda I)\bar{x} = A\bar{x} \iff (\lambda I)\bar{x} - A\bar{x} = \bar{0}$$

$$\iff (\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$$

296-297: Ekvationen $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$ har en icketrivial lösning om och endast om $\det(\lambda I - A) = 0$
Detta är den karakteristiska ekvationen till matrisen A.
$\det(\lambda I - A)$ är det karakteristiska polynomet.

Sammanfattning: λ är ett egenvärde till A om och endast om $\det(\lambda I - A) = 0$

Exempel: Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$. Bestäm A:s egenvärden, och hitta en bas av egenvektorer till A.

Lösning. Egenvärdena ges av lösningarna λ till ekvationen

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 4 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 7) + 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 18$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \iff \lambda = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-72}{4}}$$

$$= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2},$$

dvs $\lambda = 6$ eller $\lambda = 3$

Egenvektorer svarande mot egenvärdet $\lambda = 6$:

$$(6I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 6-2 & -1 \\ 4 & 6-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 4x - y = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = 4t \end{cases} \iff (x, y) = (t, 4t) = t(1, 4).$$

Egenvärdet $\lambda = 3$: $(3I - A) = \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & 3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, så

$$(3I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff (x, y) = (t, t) = t(1, 1)$$

Exempelvis är $\{(1,4), (1,1)\}$ en bas av egenvektorer till A.

Kontroll: $A\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\-4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\24\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ – egenvektor med $\lambda=6$.

$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\-4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ – egenvektor med $\lambda=3$

Studera nu ovanstående exempel. $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\-4 & 7\end{bmatrix}$ är standardmatrisen för avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $T(x,y) = (2x+y, -4x+7y)$

I basen $B = \{\bar{u}=(1,4), \bar{v}=(1,1)\}$ har vi att

$T(\bar{u}) = 6\bar{u}$ och $T(\bar{v}) = 3\bar{v}$, så

$$[T]_{B,B} = \left[\, [T(\bar{u})]_B \;\; [T(\bar{v})]_B \,\right] = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = D.$$

Låt nu $\bar{w}$ vara en godtycklig vektor, och låt $E=\{(1,0),(0,1)\}$.
Vi har att

$$[\bar{w}]_E = P_{B\to E}[\bar{w}]_B = \begin{bmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}[\bar{w}]_B.$$

Eftersom $[T(\bar{w})]_E = A[\bar{w}]_E \left(= [T]_{E,E}[\bar{w}]_E\right)$,
får vi att

$$\underbrace{P_{B\to E}[T(\bar{w})]_B}_{[T(\bar{w})]_E} = A\underbrace{P_{B\to E}[\bar{w}]_B}_{[\bar{w}]_E}$$

$$\Leftrightarrow \quad [T(\bar{w})]_B = (P_{B\to E})^{-1} A P_{B\to E} [\bar{w}]_B$$

Men vi har ju även att

$$[T(\bar{w})]_B = [T]_{B,B}[\bar{w}]_B = D[\bar{w}]_B$$

vilket ger att $[T]_{B,B} = D = (P_{B\to E})^{-1} A P_{B\to E}$

I exemplet har vi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \{(1,4), (1,1)\}$ och

$P_{B \to E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, vilket ger $(P_{B \to E})^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

$$(P_{B \to E})^{-1} A \, P_{B \to E} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 24 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

sid 307: Allmänt resultat: Låt $B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ vara en bas av egenvektorer till matrisen A. Skriv $P = P_{B \to E}$, där E är standardbasen; kolonnerna i P är vektorerna $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ uttryckta i standardbasen. Då är

$$P^{-1}AP = D,$$

där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, där $A\bar{v}_i = \lambda_i$.

sid 305: Vi säger att A är <u>diagonaliserbar</u> om det finns en inverterbar matris P sådan att

$$D = P^{-1}AP$$

är en diagonalmatris. Låt A vara en $n \times n$-matris.

sid 306: <u>Sats</u> A är diagonaliserbar om och endast om det finns en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till matrisen A.

<u>sid 310-311</u>: En fördel med att diagonalisera en matris A ä att vi sedan lätt kan beräkna A^N för stora N. Anta nämligen att $P^{-1}AP = D$. Detta kan vi skriva om som

$$A = PDP^{-1} \qquad (PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1})$$

Vi ser nu att

$$A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = PDP^{-1}A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$$

$$\vdots$$

Allmänt: $$A^N = \underbrace{\underbrace{PDP^{-1}}_{A}\,\underbrace{PDP^{-1}}_{A}\cdots\underbrace{PDP^{-1}}_{A}}_{N \text{ gångar}} = PD^NP^{-1}$$

Alltså: $\boxed{A^N = PD^NP^{-1}}$

Exempel: Beräkna A^N, då $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$.

<u>Lösning</u>. Vi vet sedan tidigare att $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, där $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ och $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$. Vi får att

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^N = PD^NP^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6^N & 0 \\ 0 & 3^N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6^N & 3^N \\ 4\cdot 6^N & 3^N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{6^N}{3} + \frac{4}{3}3^N & \frac{6^N}{3} - \frac{1}{3}3^N \\ -\frac{4}{3}6^N + \frac{4}{3}3^N & \frac{4}{3}6^N - \frac{1}{3}3^N \end{bmatrix}$$

sid 308: Är alla matriser diagonaliserbara? Ekvivalent: Finns det alltid en bas bestående av egenvektorer? Svar: Nej.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Egenvärden ges av nollställena till det karakteristiska polynomet

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1) + 9$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

$\det(\lambda I - A) = 0$ har som enda lösning $\lambda = 2$. Hitta egenvektorer som hör till detta enda egenvärde $\lambda = 2$:

$$[2I - A]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} -3(x+3y) = 0 \\ x+3y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = t(-3,1).$$

De enda egenvektorerna är alltså multiplar av vektorn $(-3,1)$. Ingen bas av egenvektorer finns alltså.

sid 299 I ovanstående exempel beräknade vi <u>egenrummet</u> till egenvärdet $\lambda = 2$. För en allmän $n \times n$-matris A och ett egenvärde λ till A definierar vi egenrummet hörande till λ att vara lösningsmängden till ekvationen $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$. Varje <u>nollskild</u> vektor i egenrummet hörande till λ är en egenvektor med egenvärde λ.

Obs: Egenrummet hörande till ett egenvärde λ är ett vektorrum.

<u>Exempel</u> Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ genom att bestämma en bas till varje egenrum till A.

<u>Lösning</u> Vi bestämmer först egenvärdena till A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$= (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\Big((\lambda-2)^2 + (-1) - (-(\lambda-2) - 1) \Big)$$

$$= (\lambda-3)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 + \lambda - 2 - 1\right) = (\lambda-3)(\lambda^2 - 3\lambda)$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-1) = (\lambda-3)^2 \lambda.$$

Två egenvärden: $\lambda = 3$ och $\lambda = 0$.

Bestäm egenrummen: <u>$\lambda=3$</u>: $(3I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x+y+z=0 \iff \begin{cases} x = -s-t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

$\iff (x,y,z) = (-s-t, s, t) = -s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$

En bas till egenrummet för $\lambda=3$ är därmed $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$

<u>$\lambda=0$</u>: $(I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger $\begin{cases} x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

$\iff (x, y, z) = (t, t, t) = t(1,1,1)$

En bas till egenrummet för $\lambda = 0$ är därmed $\{(1,1,1)\}$

En bas av egenvektorer: $\{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\} = B$

Bilda matrisen $P = P_{B \to E} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vi får då att

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalelementen är 3, 3, 0, ty $A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$A\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Följdfråga:</u> Hitta en bas av egenvektorer till A^N för varje $N \geq 1$, och diagonalisera A^N, där A är som i ovanstående exempel.

<u>Lösning</u> Om $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, så är $A^2\bar{v} = A(A\bar{v}) = A(\lambda\bar{v}) =$
$= \lambda A\bar{v} = \lambda^2\bar{v}$, och $A^3\bar{v} = A(A^2\bar{v}) = A(\lambda^2\bar{v}) = \lambda^2 A(\bar{v}) = \lambda^3\bar{v}$.

Mer allmänt:

$$A^N\bar{v} = \lambda^N\bar{v}.$$

I synnerhet är $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ egenvektorer till A^N med egenvärde 3^N, medan $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde $0^N = 0$. Med $P = P_{B \to E}$ som tidigare får vi

$$P^{-1}A^N P = \begin{bmatrix} 3^N & 0 & 0 \\ 0 & 3^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

sid 297: Att lösa den karakteristiska ekvationen då A är en $n \times n$-matris med $n \geq 3$ och alla element är heltal:

Om $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$, och om $\lambda_0 \neq 0$ är ett heltal sådant att λ_0 är ett egenvärde till A, så gäller att

c_0 är delbart med λ_0.

Exempel: Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Vi får att

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 6 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = [\text{räkna på}] = \lambda^3 - \lambda^2 - 11\lambda + 3.$$

Heltal som kan vara egenvärden: $3, 1, -3, -1$ (ty $c_0 = +3$)

Testa: $\lambda = 3$ ger $3^3 - 3^2 - 11 \cdot 3 + 3 = 27 - 9 - 33 + 3 = -12$

$\lambda = 1$ ger $1^3 - 1^2 - 11 \cdot 1 + 3 = -8$

$\lambda = -3$ ger $(-3)^3 - (-3)^2 - 11 \cdot (-3) + 3 = -27 - 9 + 33 + 3 = 0$ ←

$\lambda = -1$ ger $(-1)^3 - (-1)^2 - 11 \cdot (-1) + 3 = -1 - 1 + 11 + 3 = 12$

Alltså är $\boxed{\lambda = -3}$ ett egenvärde, och $\lambda + 3$ är en faktor i polynomet:

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 4\lambda + 1 \\ \hline \lambda + 3 & \lambda^3 - \lambda^2 - 11\lambda + 3 \\ & \underline{\lambda^3 + 3\lambda^2} \\ & -4\lambda^2 - 11\lambda \\ & \underline{-4\lambda^2 - 12\lambda} \\ & \lambda + 3 \\ & \underline{\lambda + 3} \\ & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 11\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$

Vi observerar nu att $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} = \boxed{2 \pm \sqrt{3}}$. Egenvärdena till A är alltså

$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{3} \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.

sid 309: Sats Låt $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ vara egenvektorer till matrisen A sådana att $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$, där $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alla är olika. Då är $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ linjärt oberoende.

Bevis då $k=2$: Anta att $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ inte är linjärt oberoende. De är då parallella, och $\bar{v}_2 = a\bar{v}_1$ för något a. Detta ger att

$$A\bar{v}_2 = A(a\bar{v}_1) \iff \lambda_2 \bar{v}_2 = a\lambda_1 \bar{v}_1$$

Multiplicera $\bar{v}_2 = a\bar{v}_1$ med λ_2: $\lambda_2\bar{v}_2 = a\lambda_2\bar{v}_1$

Vi får $a\lambda_1\bar{v}_1 = a\lambda_2\bar{v}_1$ (båda led är lika med $\lambda_2\bar{v}_2$), så

$a(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_1 = 0$. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ger att $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, så därför är $a=0$.

Vi får alltså att $\bar{v}_2 = 0\bar{v}_1 = \bar{0}$, vilket är omöjligt; en egenvektor är alltid nollskild.

(Beviset i allmänna fallet följer samma mönster.)

Exempel: Finns det en matris A sådan att $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$ är egenvektorer med egenvärden 3, 2 respektive 1?

Lösning: (Vi har alltså att $A\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$)

Obs: $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$ är egenvektorer med tre olika egenvärden. Dock är $\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, så vektorerna är linjärt beroende, en motsägelse. Det finns alltså ingen matris med de givna egenskaperna.

Sats Om A är en $n \times n$-matris med n olika reella egenvärden, så är A diagonaliserbar. Vi kan alltså bilda en bas till $\mathbb{R}^n$ bestående av en egenvektor för varje egenvärde.

För komplexa egenvärden (tex $3-4i$) blir även egenvektorerna komplexa, och dessa ligger inte i $\mathbb{R}^n$.

Sid 312: Låt A vara en $n \times n$-matris, och anta att det karakteristiska polynomet kan skrivas

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{a_m},$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ är egenvärdena till A.

Talet a_i är den algebraiska multipliciteten för egenvärdet λ_i

Exempel: Om $\det(\lambda I - A) = (\lambda-7)^3(\lambda+11)^5(\lambda-4)\lambda^2$,

så har
$$\begin{cases} \lambda_1 = 7 & \text{multipliciteten } 3 \\ \lambda_2 = -11 & \text{-"-} \quad 5 \\ \lambda_3 = 4 & \text{-"-} \quad 1 \\ \lambda_4 = 0 & \text{-"-} \quad 2 \end{cases}$$

$n = 3+5+1+2 = 11$, så A är en 11×11-matris.

Till varje egenvärde λ_i hör ett egenrum, alltså nollrummet till matrisen $\lambda_i I - A$. Dimensionen för detta egenrum är den geometriska multipliciteten för egenvärdet λ_i.

Sats Den geometriska mult. är alltid mindre än eller lika med den algebraiska mult.

Exempel. Vi såg tidigare att $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ uppfyllde $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2$. De enda egenvektorerna var multiplar av vektorn $(-3,1)$. Alltså är den alg. mult. lika med 2, medan den geom. mult. är lika med 1

2 = graden på $(\lambda-2)^2$

1 = dimensionen på nollrummet.

Sats En matris är diagonaliserbar precis då alg. mult. = geom. mult. för varje egenvärde.