Sammansättningar och inverser (avsnitt 8.3)

Om $T_1 : U \to V$ och $T_2 : V \to W$ är två linjära avbildningar, så är även sammansättningen $T_2 \circ T_1 : U \to W$ en linjär avbildning. Här är

$$T_2 \circ T_1(\bar{u}) = T_2(T_1(\bar{u})).$$

Om T är en isomorfi (injektiv och surjektiv), så kan vi invertera T: Anta att $T: V \to W$. Då definieras $T^{-1}: W \to V$ som

$$T^{-1}(\bar{w}) = \text{den vektor } \bar{v} \text{ i } V \text{ som uppfyller } T(\bar{v}) = \bar{w}.$$

Observera:

$$\begin{cases} T \circ T^{-1}(\bar{w}) = T(\bar{v}) = \bar{w} \\ T^{-1} \circ T(\bar{v}) = T^{-1}(\bar{w}) = \bar{v}. \end{cases}$$

Exempel. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T(x,y) = (-3x+4y, -x-2y)$. Vad blir T^{-1}?

Lösning: T har standardmatrisen $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, dvs om $T(x,y) = (a,b)$,

så är $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{6+4} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2/10 & -4/10 \\ 1/10 & -3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2a-4b)/10 \\ (a-3b)/10 \end{bmatrix}$$

Vi har alltså att $T^{-1}(a,b) = \left(\frac{-2a-4b}{10}, \frac{a-3b}{10} \right)$

$$\left(\text{dvs } T^{-1}(x,y) = \left(\frac{-2x-4y}{10}, \frac{x-3y}{10} \right) \right)$$

Allmänt gäller att $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$

Matriser för allmänna linjära avbildningar (avsnitt 8.4)

Låt V och W vara vektorrum, och låt $T: V \to W$ vara en linjär avbildning.

Låt $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ vara en bas för V.
Låt $B' = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ vara en bas för W.

Problem: Hitta en matris A sådan att

$$A[\bar{x}]_B = [T(\bar{x})]_{B'} \quad \text{för varje } \bar{x} \text{ i } V.$$

Alltså: Anta att $[\bar{x}]_B = (c_1, \dots, c_n)$, det vill säga

$$\bar{x} = c_1\bar{v}_1 + \dots + \bar{c}_n\bar{v}_n$$

Anta vidare att $[T(\bar{x})]_{B'} = (d_1, \dots, d_m)$, det vill säga

$$T(\bar{x}) = d_1\bar{w}_1 + \dots + d_m\bar{w}_m.$$

Vi vill då att $A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$

Vi skriver $A = [T]_{B',B}$. Detta ger formeln

$$\underbrace{[T(\bar{x})]_{B'}}_{\substack{m\times 1\text{-matris} \\ \text{(kolonnvektor)}}} = \underbrace{[T]_{B',B}}_{m\times n\text{-matris}} \underbrace{[\bar{x}]_B}_{n\times 1\text{-matris}}$$

Exempel: Definiera $B = \{\bar{v}_1 = (1,-1),\ \bar{v}_2 = (-1,2)\}$

$B' = \{\bar{w}_1 = (1,0,0),\ \bar{w}_2 = (0,1,0),\ \bar{w}_3 = (0,0,1)\}$

Anta att $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definieras som

$$T(x,y) = (x+2y,\ 2x-y,\ 3x+y)$$

Vi ser att $T(\bar{v}_1) = T(1,-1) = (-1,3,2)$
$T(\bar{v}_2) = T(-1,2) = (3,-4,-1)$

B' är standardbasen, så

$$[T(\bar{v}_1)]_{B'} = [(-1,3,2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T(\bar{v}_2)]_{B'} = [(3,-4,-1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi erhåller alltså att

$$[T(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2)]_{B'} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Om $[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, får vi $[T(\bar{x})]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}[\bar{x}]_B$

Alltså är

$$[T]_{B',B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Exempel. Definiera $C = \{\bar{v}_1 = (1,0,0),\ \bar{v}_2 = (0,1,0),\ \bar{v}_3 = (0,0,1)\}$

$$C' = \{\bar{w}_1 = (1,-1),\ \bar{w}_2 = (-1,2)\}$$

Låt $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definieras enligt $T(x,y,z) = (x-y+z, -x+2y-3z)$.
Bestäm $[T]_{C',C}$.

Lösning. Notera först att

$$\left.\begin{aligned} T(\bar{v}_1) &= T(1,0,0) = (1,-1) \\ T(\bar{v}_2) &= T(0,1,0) = (-1,2) \\ T(\bar{v}_3) &= T(0,0,1) = (1,-3) \end{aligned}\right\} \text{vill uttrycka i basen } C'$$

Vi behöver veta hur en vektor (a,b) ser ut i basen C'.
Ansätt

$$[(a,b)]_{C'} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow (a,b) = x\bar{w}_1 + y\bar{w}_2 = x(1,-1) + y(-1,2).$$

Detta kan vi skriva

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{b} = A\bar{x} \\ \Updownarrow \\ A^{-1}\bar{b} = \bar{x} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{inversen}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b \\ a+b \end{bmatrix}$$

Alltså är $[(a,b)]_{C'} = \begin{bmatrix} 2a+b \\ a+b \end{bmatrix}$

Vi får därmed att

$$[T(\bar{v}_1)]_{C'} = [(1,-1)]_{C'} \overset{a=1,\ b=-1}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(\bar{v}_2)]_{C'} = [(-1,2)]_{C'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} a=-1 \\ b=2 \end{pmatrix}$$

$$[T(\bar{v}_3)]_{C'} = [(1,-3)]_{C'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} a=1 \\ b=-3 \end{pmatrix}$$

Slutsats: $\left[T(r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3)\right]_{C'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$,

så om $[\bar{x}]_C = (r,s,t)$, får vi $[T(\bar{x})]_{C'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} [\bar{x}]_C$

Alltså är $[T]_{C',C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Observera att $[T]_{C',C} = \left[[T(\bar{v}_1)]_{C'} \; [T(\bar{v}_2)]_{C'} \; [T(v_3)]_{C'} \right]$.

Denna formel gäller allmänt: Kolumnerna i $[T]_{B',B}$ är T av elementen i B uttryckta i basen B':

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\bar{v}_1)]_{B'} \; \cdots \; [T(\bar{v}_n)]_{B'} \right]$$

Sammansättningar

Anta att $T_1 : U \to V$ och $T_2 : V \to W$ är linjära avbildningar. Låt B vara en bas för U, B' en bas för V och B'' en bas för W. Då gäller att

$$[T_2 \circ T_1]_{B'',B} = [T_2]_{B'',B'} [T_1]_{B',B}$$

Exempel. Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ges av $T_1(x,y) = (x+2y, 2x-y, 3x+y)$,
och låt $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T_2(x,y,z) = (x-y+z, -x+2y-3z)$
(våra tidigare exempel). Låt

$$B = B'' = \{(1,-1), (-1,2)\}$$
$$B' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Vi har tidigare räknat ut att $[T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$[T_2]_{\underset{=B''}{B},B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi får att

$$[T_2 \circ T_1]_{B,B} = [T_2]_{B,B'} [T_1]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $\underbrace{T_2 \circ T_1}_{T}(x,y) = T_2(T_1(x,y)) = T_2(x+2y, 2x-y, 3x+y)$

$$= (2x+4y, -6x-7y)$$

$\boxed{B = \{(1,-1), (-1,2)\}}$

Detta ger $T(1,-1) = (-2, 1)$
$T(-1,2) = (6, -8)$

Vet sedan tidigare (sid 21) att $[(a,b)]_B = \begin{bmatrix} 2a+b \\ a+b \end{bmatrix}$, så

$$[T(1,-1)]_B = [(-2,1)]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[T(-1,2)]_B = [(6,-8)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{så} \quad [T]_{B,B} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$