Allmänna linjära avbildningar (avsnitt 8.1)

Skippa: Exempel 6, 9, 11, 12, 18, 19

Kom ihåg: En <u>matrisavbildning</u> är en funktion $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sådan att $T_A(\bar{x}) = A\bar{x}$, där A är en $m \times n$-matris.

Matrisavbildningar har följande egenskaper:

$$\begin{cases} T_A(\bar{u}+\bar{v}) = T_A(\bar{u}) + T_A(\bar{v}) \\ T_A(k\bar{u}) = kT_A(\bar{u}) \end{cases}$$

Låt nu V och W vara godtyckliga vektorrum. $T : V \to W$ är en <u>linjär avbildning</u> (linear transformation) om följande gäller för alla $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i V och alla skalärer k:

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$
$$T(k\bar{u}) = kT(\bar{u})$$

Om $V = W$, så är $T : V \to V$ en <u>linjär operator</u> på V.

Exempel: Varje matrisavbildning är en linjär avbildning.

Räkneregel: $T(k_1\bar{v}_1 + \cdots + k_r\bar{v}_r) = k_1T(\bar{v}_1) + \cdots + k_rT(\bar{v}_r)$

Exempel: $T(a\bar{u} + b\bar{v} + c\bar{w}) = aT(\bar{u}) + bT(\bar{v}) + cT(\bar{w})$

Ännu en räkneregel: $T(\bar{0}) = \bar{0}$

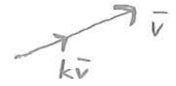
Bevis: $kT(\bar{0}) = T(k\bar{0}) = T(\bar{0})$. $k = 0$ ger $\bar{0} = T(\bar{0})$

Nollavbildningen från V till W: $T(\bar{v}) = \bar{0}$ för varje $\bar{v}$ i V.

Identitetsavbildningen på V: $T(\bar{v}) = \bar{v}$ för varje $\bar{v}$ i V.

Annat exempel: Låt k vara en skalär, och definiera $T: V \to V$ som $T(\bar{v}) = k\bar{v}$. Detta är en linjär operator.

$0 < k < 1$: T är en <u>kontraktion</u> av V



$1 < k$: T är en <u>dilation</u> av V

Ett till exempel: M_{nn} = vektorrummet av $n \times n$-matriser.
Definiera $T: M_{nn} \to M_{nn}$ som $T(A) = A^T$ (transponat).
Då är T en linjär operator:

$$T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$
$$T(kA) = (kA)^T = k(A^T) = kT(A)$$

<u>Exempel</u>: Låt $\bar{v}_1 = (1,2)$ och $\bar{v}_2 = (-2,1)$, och låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning som ges av

$$\begin{cases} T(\bar{v}_1) = T(1,2) = (1,2,-3,2) \\ T(\bar{v}_2) = T(-2,1) = (3,6,6,1) \end{cases}$$

Ge en formel för $T(x,y)$ för allmänna (x,y).

<u>Lösning</u>. Vi har tidigare löst liknande uppgifter genom att införa standardmatrisen A för T. I detta fall skulle vi då få att

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_1 \ \bar{v}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{T(\bar{v}_1)\ T(\bar{v}_2)} \Leftrightarrow \cdots$$

Annan metod utan standardmatris:
Observera att $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$, ty $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är inte parallella.
Låt (a,b) vara koordinatvektorn för (x,y) i basen S:

$$(x,y) = \underline{a}(1,2) + \underline{b}(-2,1) = (a-2b, 2a+b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2b \\ y = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Invertering ger $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{övning}}}{=} \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (x+2y)/5 \\ (-2x+y)/5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = (x+2y)/5 \\ b = (-2x+y)/5 \end{cases}$$

Alltså: $(x,y) = a(1,2) + b(-2,1)$

$$\Rightarrow T(x,y) = aT(1,2) + bT(-2,1)$$

$$= \frac{x+2y}{5} T(1,2) + \frac{-2x+y}{5} T(-2,1)$$

$$= \frac{x+2y}{5} (1,2,-3,2) + \frac{-2x+y}{5} (3,6,6,1)$$

$$= [\text{räkna}] = (-x+y, -2x+2y, -3x, y)$$

Svar: $T(x,y) = (-x+y, -2x+2y, -3x, y)$

Kärna och värderum

Kärnan till en linjär avbildning $T: V \to W$ är mängden av vektorer $\bar{v}$ i V sådana att $T(\bar{v}) = \bar{0}$.
Kärnan betecknas $\ker T$.

Exempel: Kärnan till en matrisavbildning $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är lika med nollrummet till matrisen A, ty

$$T_A(\bar{x}) = \bar{0} \iff A\bar{x} = \bar{0}$$

Kärnan till $T: V \to W$ är ett delrum till V.
Låt nämligen $\bar{u}$ och $\bar{v}$ tillhöra kärnan, och låt k vara en skalär. Vi får att

$$\begin{cases} T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \overset{\bar{u} \text{ och } \bar{v} \text{ tillhör kärnan}}{=} \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \\ T(k\bar{u}) = kT(\bar{u}) = k\bar{0} = \bar{0}, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\bar{u}+\bar{v}$ och $k\bar{u}$ tillhör kärnan.

Värderummet till T består av alla vektorer $\bar{w}$ i W sådana att $\bar{w} = T(\bar{v})$ för någon vektor $\bar{v}$ i V.

Exempel: Värderummet till en matrisavbildning $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är lika med kolumnrummet till T_A.

Dimensionen för värderummet är rangen för T

<u>Exempel</u> Hitta baser för kärnan och värderummet till den linjära avbildning $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Lösning: Kärnan till T = Nollrummet till A.
Värderummet till T = Kolumnrummet till A.

Radoperationer bevarar nollrummet.
Radoperationer bevarar <u>inte</u> kolumnrummet, men de bevarar <u>linjärt oberoende</u> mellan kolumnerna.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array} = B$$

Nollrummet: $A\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow B\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$. Vi får

$$\begin{cases} x_1 + s + t + 3u = 0 \Leftrightarrow x_1 = -s - t - 3u \\ x_2 + s + 2t = 0 \Leftrightarrow x_2 = -s - 2t \end{cases}$$

Alltså: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s-t-3u, -s-2t, s, t, u)$

$= (-s, -s, s, 0, 0) + (-t, -2t, 0, t, 0) + (-3u, 0, 0, 0, u)$

$= s(-1, -1, 1, 0, 0) + t(-1, -1, 0, 1, 0) + u(-3, 0, 0, 0, 1)$

$\boxed{\text{Bas för nollrummet: } \{(-1,-1,1,0,0),\ (-1,-1,0,1,0),\ (-3,0,0,0,1)\}}$

Kolumnrummet: Hitta först en bas för kolumnrummet till

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ En sådan bas utgörs av

kolumnerna med ledande ettor, alltså kolumn 1 och 2.

Motsvarande kolumner i A är då en bas för kolumnrummet till A:

Kolumn 1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ Kolumn 2: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Bas för kolumnrummet } \{(1,0,2),\ (-2,1,1)\}}$

Notera i exemplet: Kärnan/nollrummet har dimension 3

Rangen är 2 $\Leftrightarrow$ Värderummet/kolumnrummet har dim. 2

$$3 + 2 = 5 = \text{antal kolumner.}$$

Gäller alltid för $T: V \to W$:

$$\boxed{\text{Rangen för } T} + \boxed{\text{dimensionen av nollrummet till } T}$$

$$= \boxed{\text{dimensionen av } V}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{rank}(T) + \underbrace{\dim \ker T}_{\left(\substack{\text{null}(T) \\ \text{i boken}}\right)} = \dim V$$

Isomorfi (avsnitt 8.2)

En linjär avbildning $T: V \to W$ är <u>injektiv</u> (one-to-one) om

$$\bar{u} \neq \bar{v} \Rightarrow T(\bar{u}) \neq T(\bar{v})$$

T är <u>surjektiv</u> (onto) om varje $\bar{w}$ i W kan skrivas $\bar{w} = T(\bar{v})$ för något $\bar{v}$ i V.

Exempel: $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, där A är en $m \times n$-matris.

T_A injektiv $\Leftrightarrow$ $A\bar{x} = \bar{b}$ har <u>högst</u> en lösning för varje högerled $\bar{b}$

T_A surjektiv $\Leftrightarrow$ $A\bar{x} = \bar{b}$ har <u>minst</u> en lösning för varje högerled $\bar{b}$

Sats: $T: V \to W$ är injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker T$ (kärnan) är lika med $\{\bar{0}\}$

Alltså: Ekvationen $T(\bar{x}) = \bar{0}$ har <u>bara</u> lösningen $\bar{x} = \bar{0}$

Sats. Om $V = W$, så gäller följande:

T är injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{\bar{0}\}$ $\Leftrightarrow$ T är surjektiv.

T är en <u>isomorfi</u> om T är injektiv och surjektiv.

Exempel: T_A är en isomorfi om och endast om A är inverterbar

---

V och W är <u>isomorfa</u> om det finns en isomorfi $T: V \to W$.

Exempel. Låt V vara planet $z=0$ i $\mathbb{R}^3$. Låt $W = \mathbb{R}^2$.
En bas för V är $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$. En linjär avbildning $T: V \to W$ ges av $T(x,y,0) = (x,y)$.
T är en isomorfi, ty:

* T är injektiv: $T(x_1,y_1,0) = T(x_2,y_2,0)$
$\Leftrightarrow (x_1,y_1,0) = (x_2,y_2,0)$
$\Leftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$
* T är surjektiv: Vi har att $(x,y) = T(x,y,0)$, så varje (x,y) i W är bilden av ett element i V.

Sats: Varje n-dimensionellt vektorrum är isomorft med $\mathbb{R}^n$.

Exempelvis är ovanstående plan $z=0$ i $\mathbb{R}^3$ isomorft med $\mathbb{R}^2$.