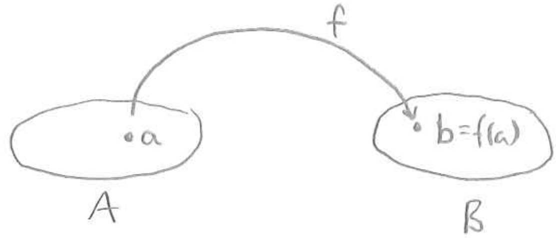
Matrisavbildningar (avsnitt 4.9)

Repetition från analysen:

En funktion f från en mängd A till en mängd B är en regel som för varje a i A ordnar ett b i B:

$$b = f(a)$$



A = domänen, B = kodomänen / målmängden

Värdemängden består av de element i B som är lika med $f(a)$ för något a.

Exempel: $A = \mathbb{R}^2$ och $B = \mathbb{R}$. Definiera

$$f(x,y) = x+y$$

I detta fall är målmängd = värdemängd $= \mathbb{R}$.

Funktioner mellan vektorrum kallar vi för avbildningar.

Vi skriver $T: V \to W$ för att beteckna en avbildning från V till W. Om $V = W$, kallar vi T för en operator.

Exempel Låt $V = \mathbb{R}^2$ och $W = \mathbb{R}^3$, och definiera $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som

$$T(x,y) = (x, y, x+2y).$$

Vad blir värdemängden till T?

Lösning: Vi vill hitta alla (a,b,c) så att $T(x,y) = (a,b,c)$ för något (x,y). Lös alltså ekvationen

$$(x, y, x+2y) = (a,b,c) \iff x(1,0,1) + y(0,1,2) = (a,b,c)$$

Vi får följande matrisekvation:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-2b \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Lösbart precis då } c-a-2b=0$$
$$\Leftrightarrow c = a+2b.$$

Värdemängden blir alltså alla element i $\mathbb{R}^3$ på formen $(a, b, a+2b)$.

Notera: T i exemplet ger upphov till en 3×2-matris.

Mer allmänt: Låt A vara en $m\times n$-matris. Låt T_A beteckna avbildningen från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ med egenskapen att

$$T_A(\bar{x}) = A\bar{x} \quad \text{(matrismultiplikation)}$$

T_A är <u>matrisavbildningen</u> hörande till A, och A är standardmatrisen till T_A.

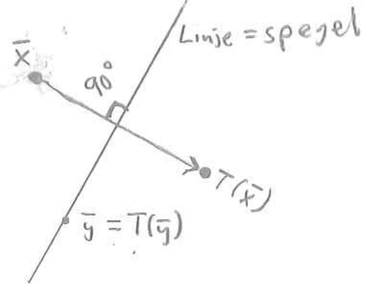
<u>Exempel</u>: Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, så är $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{bmatrix}$,

dvs $T_A(x,y) = (x, y, x+2y)$.

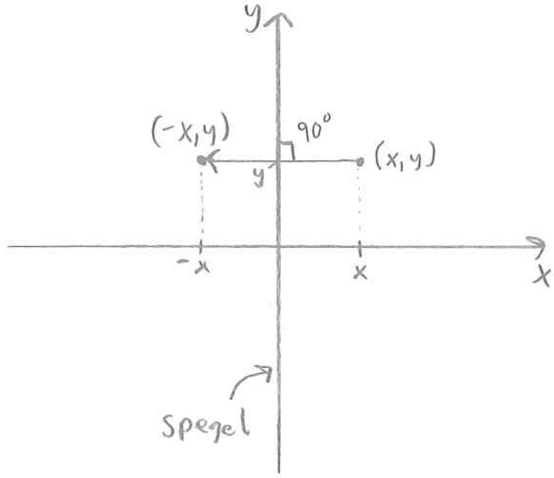
<u>Räkneregler</u>: $T_A(\bar{x}+\bar{y}) = T_A(\bar{x}) + T_A(\bar{y}) \quad kT_A(\bar{x}) = T_A(k\bar{x})$

Vanliga matrisoperationer i planet (sid 252-258)

Spegling i en linje:



Låt T_A vara spegling i y-axeln:



$T_A(x, y) = (-x, y)$

Vi ser att

$T_A(1,0) = (-1,0)$

$T_A(0,1) = (0,1)$

Alltså är $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ och $A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad A\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Allmän princip för matrisoperatorer $T_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

Om $T_A(1,0) = (a, c)$ och $T_A(0,1) = (b, d)$, så är

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $T_A(1,0)$ $\quad$ $\nwarrow$ $T_A(0,1)$

Liknande princip för allmänna m×n-matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \qquad (T_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2)$$

$\uparrow$ $\quad \nwarrow$

$T_A(1,0,0,0)$, $T_A(0,1,0,0)$, ---

Ännu en observation: $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ har standardmatrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Spegling i x-axeln: Studera själva.

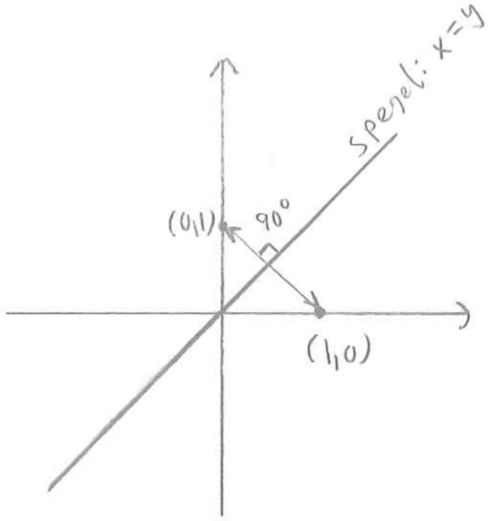
Låt T_A vara spegling i linjen $x=y$. Punkterna $(1,0)$ och $(0,1)$ är då varandras spegelbilder:

$T_A(1,0) = (0,1)$

$T_A(0,1) = (1,0)$

Vi får att

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

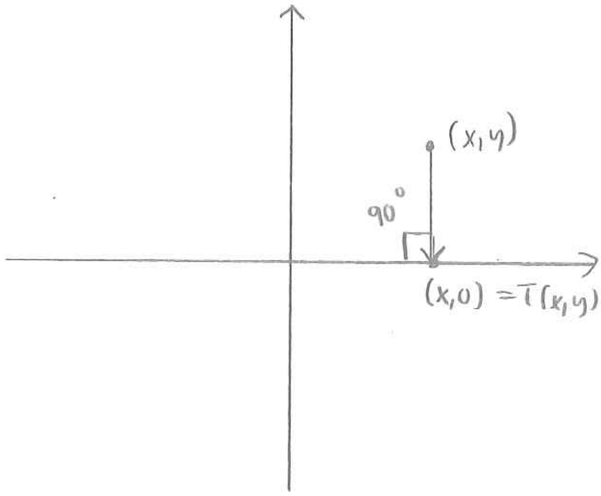


Låt T_A vara ortogonal projektion på x-axeln:

$T_A(x,y) = (x,0)$

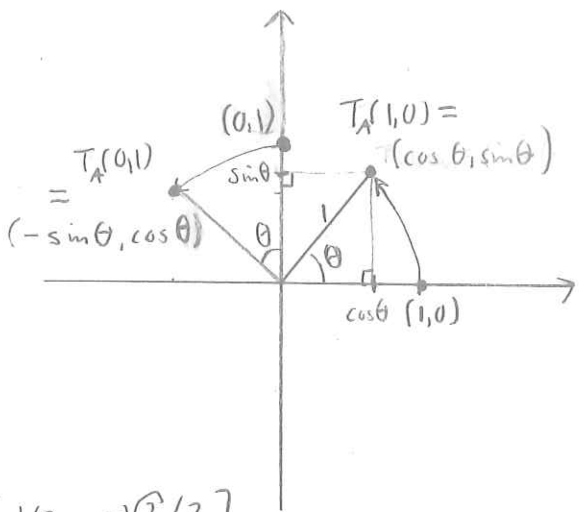
$\Updownarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Ortogonal projektion på y-axeln: Studera själva.

Låt T_A vara rotation moturs med vinkeln θ:



$T_A(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$T_A(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

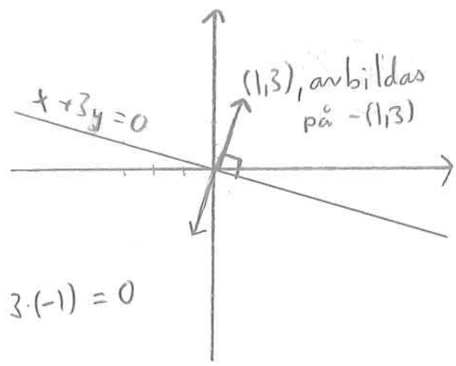
$\Updownarrow$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Exempel: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ger $A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ (övning)

Att studera själva: kontraktion, dilation, expansion, komprimering, skjuvning (shear), sid 256 - 258.

Svårare exempel: Låt T vara spegling i linjen $x + 3y = 0$.
Bestäm standardmatrisen A för T.



Lösning

T avbildar varje punkt på linjen (spegeln) på sig själv: En sådan punkt är $(3,-1)$, ty $3 + 3\cdot(-1) = 0$

$\boxed{T(3,-1) = (3,-1).}$

Om vektorn från origo till (a,b) är vinkelrät mot linjen, så avbildas (a,b) på $-(a,b) = (-a,-b)$

Linjens ekvation: $(1,3)\cdot(x,y) = 0$, så $(a,b) = (1,3)$ är en sådan punkt.

$\boxed{T(1,3) = (-1,-3).}$

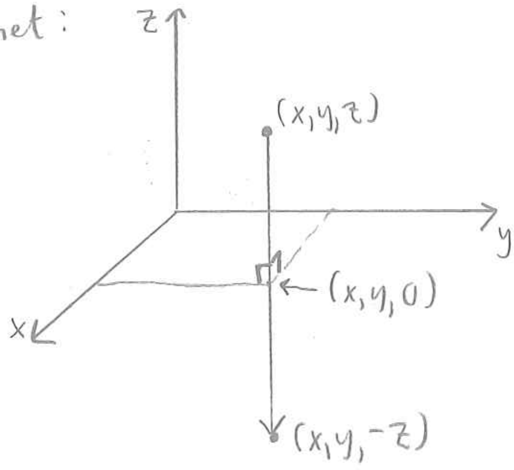
Sammanfattning: $A\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$,

så $A\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$

Räkna själva: $A = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$.

Vanliga matrisoperatorer i rummet (sid. 252–258)

Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i xy-planet:



$$T(x, y, z) = (x, y, -z)$$

Vi ser att

$$T(1,0,0) = (1,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,1,0)$$
$$T(0,0,1) = (0,0,-1)$$

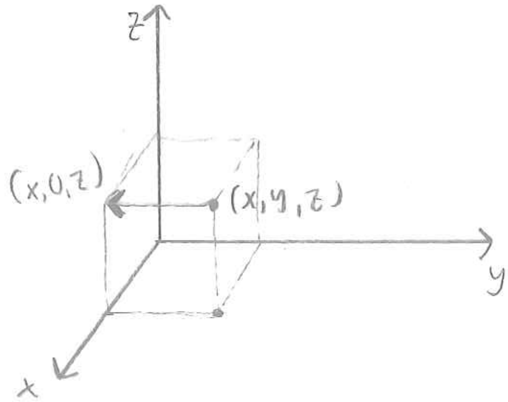
Detta ger standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $T(1,0,0)$ $\quad$ $\uparrow$ $T(0,1,0)$ $\quad$ $\uparrow$ $T(0,0,1)$

Spegling i xz- och yz-planet: Studera själva.

Låt T_A vara ortogonal projektion på xz-planet:



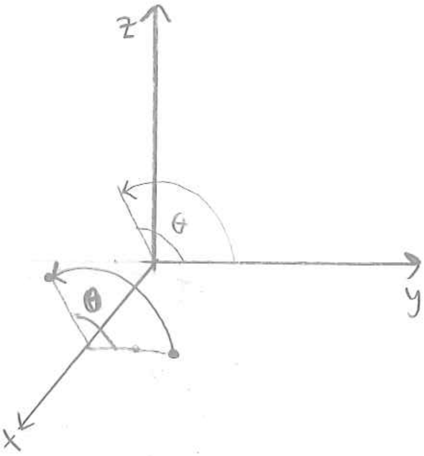
$$T_A(x, y, z) = (x, 0, z)$$

$$\Updownarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektion i xy- och yz-planet: Studera själva

Låt T_A vara rotation motsols runt x-axeln med vinkeln θ:



$T_A(1,0,0) = (1,0,0)$ (på x-axeln)

$$\left.\begin{array}{l} T_A(0,1,0) = (0, \cos\theta, \sin\theta) \\ T_A(0,0,1) = (0, -\sin\theta, \cos\theta) \end{array}\right\} \text{ i } yz\text{-planet.}$$

Vi får

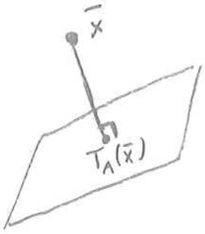
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation runt y- eller z-axeln: Studera själva.

Vad händer vid rotation runt y-axeln?

Att titta på själva: Övriga operatorer (sid 256-258)

<u>Svårare exempel</u> Låt T_A vara ortogonal projektion på planet $2x+3y-z=0$. Bestäm A.



Lösning: Varje punkt i planet avbildas på sig själv. Två sådana punkter: $(1,0,2)$ och $(0,1,3)$

$\big((2,3,-1)\cdot(1,0,2) = 0, \quad (2,3,-1)\cdot(0,1,3) = 0\big)$

Om vektorn från origo till (a,b,c) är vinkelrät mot planet, avbildas (a,b,c) på $(0,0,0)$. Planets normal $(2,3,-1)$ är en sådan punkt: Vi får

$T_A(1,0,2) = (1,0,2)$, $T_A(0,1,3) = (0,1,3)$, $T_A(2,3,-1) = (0,0,0)$, dvs

$$A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \big[\text{räkna själva}\big] = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} = \text{svar.}$$

Egenskaper hos matrisoperatorer (avsnitt 4.10)

Vi kan ta sammansättningen (composition) av två matrisavbildningar $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ och $T_B: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^k \arrow[l, "T_B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "T_A"'] \arrow[ll, bend left, "T_B \circ T_A"] \end{tikzcd}$$

$T_B \circ T_A$ är den avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ som ges av

$$(T_B \circ T_A)(\bar{x}) = T_B(T_A(\bar{x}))$$

Notera att

$$(T_B \circ T_A)(\bar{x}) = T_B(T_A(\bar{x})) = T_B(A\bar{x}) = B(A\bar{x}) =$$
$$= (BA)(\bar{x}) = T_{BA}(\bar{x}),$$

dvs $T_B \circ T_A = T_{BA}$, och $T_B \circ T_A$ har standardmatrisen BA.

Exempel:

$T_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är rotation med vinkeln $2\pi/3$

$T_B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ortogonal projektion på x-axeln

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

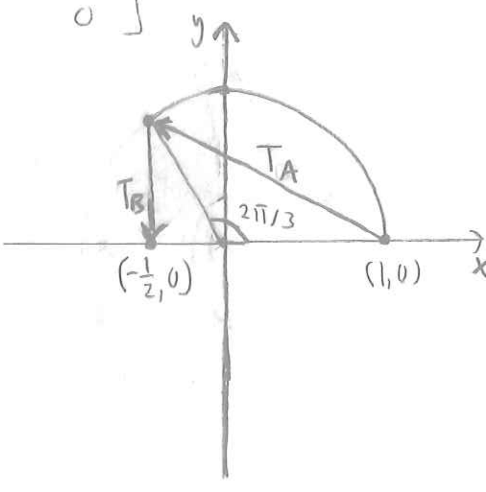
$$\Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta är matrisen för $T_B \circ T_A = T_{BA}$

Kontroll:

$$T_B(T_A(1,0)) = T_B\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$T_B(T_A(0,1)) = T_B\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$



En matrisavbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är

<u>injektiv</u> (one-to-one) om T avbildar olika

punkter i $\mathbb{R}^n$ på olika punkter i $\mathbb{R}^m$:

$$\bar{u} \neq \bar{v} \Rightarrow T(\bar{u}) \neq T(\bar{v})$$

Exempel: $T(x,y) = x+y$ är inte injektiv, ty

exempelvis är $T(x,-x) = 0$ för alla x, så

T avbildar flera punkter på 0.

<u>Sats</u> (Theorem 4.10.1): $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är

injektiv om och endast om A är inverterbar.

Notera: Om A är inverterbar, så gäller att

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{A^{-1}} \circ T_A = T_I,$$

där T_I är identitetsavbildningen: $T_I(\bar{x}) = \bar{x}$ för alla $\bar{x}$.

Vi har nämligen att $T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$.

Exempel: Låt T_A vara rotation motsols i $\mathbb{R}^3$ runt x-axeln

med vinkeln θ. Då är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ dvs}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ 0 & \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

övning övning

rotation <u>medsols</u> med vinkeln θ.

$T_{A^{-1}}$ tar oss tillbaka till startpunkten:

$$\begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[r, bend left, "T_A"] & T_A(\bar{x}) \arrow[l, bend left, "T_{A^{-1}}"] \end{tikzcd}$$