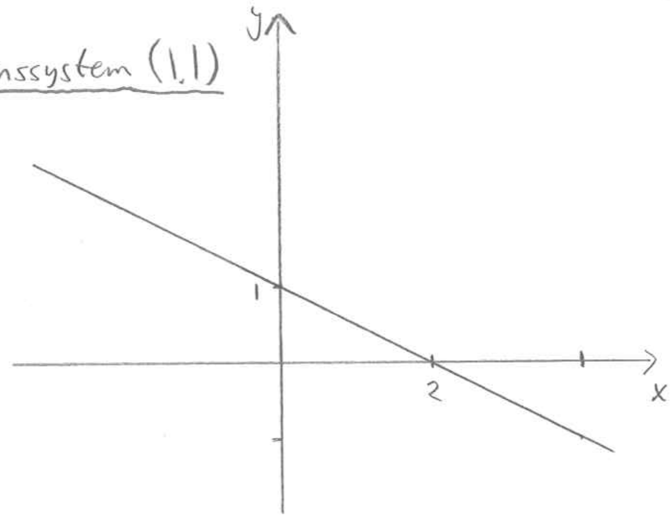
Linjära ekvationer och ekvationssystem (1.1)



Inledande exempel:

Linje i planet.

Ekvationen för en sådan är

$$y = kx + m$$

(förutsatt att linjen inte är vertikal).

Vi ser följande:

Linjen skär x-axeln där $x=2$. När $y=0$, är alltså $x=2$

Linjen skär y-axeln där $y=1$. När $x=0$, är alltså $y=1$.

Insatt i ekvationen:

$$\begin{cases} 0 = k\cdot 2 + m \\ 1 = k\cdot 0 + m \end{cases}$$

Vi får följande <u>linjära ekvationssystem</u> i k och m:

$$\begin{cases} 2k + m = 0 \\ \quad\;\; m = 1 \end{cases}$$

Lösning: $k = -\frac{1}{2}$, $m = 1$. Ekvationen för linjen blir alltså

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \iff \frac{1}{2}x + y = 1$$

ekvivalenspil

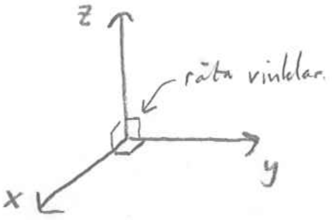
Allmän formel för en linje i planet: $ax + by = c$

a, b, c är reella <u>konstanter</u>, och minst en av a och b är nollskild.

har fixa värden som ej beror på x och y

$ax + by = c$ är en <u>linjär ekvation</u>.

Även i rummet kan vi studera linjära ekvationer. I rummet har vi en x-axel, en y-axel och en z-axel.

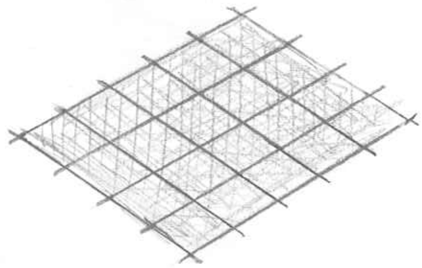


Linjär ekvation i rummet:

$$ax + by + cz = d,$$

a, b, c, d reella konstanter.

Om någon av a, b, c är nollskild, beskriver ekvationen ett plan.



Del av plan (indelat i rutor)

Mer allmänt: Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal (1, 2, 3, 4, ...)

En linjär ekvation i variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$ är en ekvation på formen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

där $a_1, \dots, a_n, b$ är reella konstanter. Variablerna $x_1, \dots, x_n$ kallas <u>obekanta</u>

Exempel: Lös ekvationen $x - 2y + 4z = 7$

<u>Lösning</u> Att lösa en ekvation innebär att hitta alla lösningar.

Lös ut x:

$$x - 2y + 4z = 7 \iff x = 2y - 4z + 7$$

För varje val av y och z har vi precis ett värde på x så att (x, y, z) blir en lösning. Vi uttrycker detta med hjälp av <u>parametrar</u>. Att ett tal t är en parameter, innebär att vi kan välja t godtyckligt. Sätt $y = s$ och $z = t$. Detta ger $x = 2s - 4t + 7$,

dvs den allmänna lösningen är $\begin{cases} x = 2s - 4t + 7 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$, s, t godtyckliga tal.

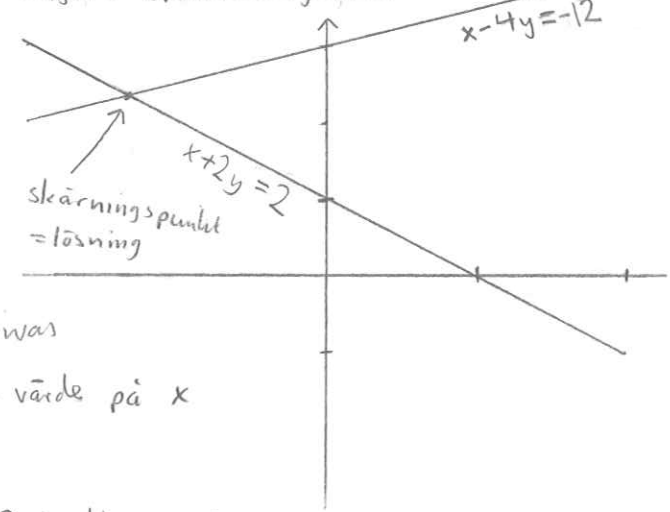
Låt m och n vara positiva heltal. Ett <u>linjärt ekvationssystem</u> med m ekvationer och n obekanta är en uppsättning linjära ekvationer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Här är alla a_{ij} och b_i konstanter. (När vi skriver a_{ij}, menar vi $a_{i,j}$)
En <u>lösning</u> till systemet är en lösning till <u>varje</u> ekvation i systemet.
Systemet är <u>lösbart</u> eller <u>konsistent</u> om det har minst en lösning.
Annars är det olösbart eller <u>inkonsistent</u>.
Faktum: Ett lösbart linjärt ekvationssystem har antingen en enda lösning eller oändligt många lösningar.

Exempel Lös följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 4y = -12 \end{cases}$$



<u>Lösning</u>

Den första ekvationen kan skrivas $x = 2-2y$. Stoppa in detta värde på x i den andra ekvationen:

$$x - 4y = -12 \iff (2-2y) - 4y = -12$$
$$\iff 2-6y = -12 \iff -6y = -14 \iff y = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Detta ger sedan att

$$x = 2-2y = 2 - 2\frac{7}{3} = \frac{6-14}{3} = -8/3$$

Lösningen blir alltså $x = -8/3$, $y = 7/3$, och denna lösning är unik.

Låt oss göra ovanstående på ett mer systematiskt sätt.

Om vi har två identiteter $A=B$ och $C=D$, gäller även att

$\boxed{C + k\cdot A = D + kB}$ för varje val av reellt tal k.

I exemplet $x+2y=2$ och $x-4y=-12$ får vi att

$$x-4y+k(x+2y) = -12+2k$$

för varje val av k. Vi säger att vi <u>adderar k gånger den första ekvationen till den andra ekvationen.</u>

Väljer vi $k=-1$, får vi

$$\begin{aligned} & x-4y+(-1)(x+2y) = -12+2(-1) \\ \Leftrightarrow\quad & x-4y-x-2y = -14 \\ \Leftrightarrow\quad & -6y = -14. \end{aligned}$$

Det gamla ekvationssystemet övergår nu i följande system:

$$\begin{cases} x+2y = 2 & \text{(samma som förut)} \\ \quad -6y = -14 & \text{(ny ekvation)} \end{cases}$$

Nu kan man lätt se att $y=\frac{7}{3}$ och $x=-8/3$, precis som tidigare.

En <u>elementär radoperation</u> på ett linjärt ekvationssystem är en av följande procedurer:

* Multiplicera en ekvation med en nollskild konstant
* Byt plats på två rader.
* Addera en multipel av en ekvation till en annan ekvation.

Dessa operationer påverkar inte lösningsmängden.

Exempel. Använd elementära radoperationer för att lösa systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

Lösning Byte av rader:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{cases}$$

(-2) gånger rad 1 → rad 2:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 3y + z + (-2)(x + 2y + 3z) = 11 + (-2)\cdot 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -y - 5z = -17 \end{cases}$$

(-1) gånger rad 2:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 5z = 17 \end{cases}$$

(-2) gånger rad 2 → rad 1:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + (-2)(x + 5z) = 14 + (-2)\cdot 17 \\ y + 5z = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7z = -20 \\ y + 5z = 17 \end{cases}$$

Med $z = t$ får vi

$x - 7t = -20 \Leftrightarrow x = 7t - 20$

$y + 5t = 17 \Leftrightarrow y = -5t + 17$

Lösningen blir alltså
$$\begin{cases} x = 7t - 20 \\ y = -5t + 17 \\ z = t \end{cases}, \quad t \text{ godtycklig parameter.}$$

En matris är en rektangulär struktur bestående av tal ordnade i rader och kolumner:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrisens element är talen i matrisen.

Totalmatrisen hörande till ett linjärt ekvationssystem är den matris som består av alla koefficienter i vänster- och högerled:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

svarar mot totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exempel:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

Elementära radoperationer fungerar lika bra på totalmatriser:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-1) \end{array}$$

elementär radoperation

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \times(-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - 7z = -20 \\ y + 5z = 17 \end{array}$$

Viktigt: * Varje kolumn utom den sista i en totalmatris svarar mot en variabel: kolumn $i \leftrightarrow x_i$

* Varje rad svarar mot en ekvation.

Avsnitt 1.2

En trappstegsmatris (matrix in row-echelon form) är en matris med följande egenskaper:

* I varje nollskild rad är det första nollskilda elementet från vänster lika med +1. Vi kallar detta element en ledande etta.
* För varje steg nedåt i matrisen hamnar de ledande ettorna strikt längre till höger.
* Alla nollskilda rader är före alla nollrader.

Exempel:
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Ledande ettor är inringade.

Att matrisen dessutom är en reducerad trappstegsmatris innebär att varje ledande etta är ensam i sin kolumn; övriga element är 0.

Exempel:
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se sid 11-12 för fler exempel.

En ledande variabel (med avseende på en trappstegsmatris) är en variabel som svarar mot en kolumn med ledande etta.

En fri variabel är en variabel som inte är ledande.

I exemplet har vi ledande ettor i kolumn 2, 4, 5.

Alltså är x_2, x_4, x_5 ledande, medan x_1 och x_3 är fria.

Att lösa ett system på reducerad trappstegsform:

* Sätt varje fri variabel lika med en parameter
* Uttryck de ledande variablerna i de fria.

Exempel:

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} x_2 + 3x_3 + 2x_6 &= 11 \\ x_4 + x_6 &= 2 \\ x_5 + 4x_6 &= -3 \\ 0 &= 0 \end{array}$$

Fria: x_1, x_3, x_6 Sätt $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_6 = u$. Vi får

$$x_2 + 3t + 2u = 11 \Leftrightarrow x_2 = -3t - 2u + 11$$

$$x_4 + u = 2 \Leftrightarrow x_4 = -u + 2$$

$$x_5 + 4u = -3 \Leftrightarrow x_5 = -4u - 3$$

Lösning: $\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -3t - 2u + 11 \\ x_3 = t \\ x_4 = -u + 2 \\ x_5 = -4u - 3 \\ x_6 = u \end{cases}$

Rad på formen $0\,0\,0 \dots 0 | 1 \Rightarrow$ inga lösningar. Detta ger $0 = 1$.

<u>Gausselimination</u> innebär att man använder elementära radoperationer för att få en matris på trappstegsform.

<u>Gauss-Jordan-elimination</u> är att först Gausseliminera och sedan använda elementära radoperationer för att få matrisen på reducerad trappstegsform

Exempel. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Gausselimination:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -7 \\ 3 & -5 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 4 & -7 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Vi har nu Gausseliminerat. Gauss-Jordan innebär att vi tar bort nollskilda element ovanför de ledande ettorna:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anta att vi vill lösa motsvarande system:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9 \end{cases}$$

<u>Bakåtsubstitution</u> innebär att först Gausseliminera och sedan arbeta sig uppåt. Det förenklade systemet (*):
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_2 - 7x_4 = -11 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Sätt $\boxed{x_4 = t}$. Rad 3 ger $x_3 + 2t = 3 \Leftrightarrow \boxed{x_3 = 3 - 2t}$. Rad 2 ger $x_2 - 7t = -11$ $\Leftrightarrow \boxed{x_2 = -11 + 7t}$. Rad 1 ger $x_1 - 2(\underbrace{-11-7t}_{x_2}) + 2(\underbrace{3-2t}_{x_3}) + 4t = 5 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 14t - 23}$

Grundläggande om matriser (avsnitt 1.3)

En <u>matris</u> av <u>storlek</u> $r \times k$ är en rektangulär struktur bestående av tal ordnade i r rader och k kolumner:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \text{kolumn } j \\ & & \downarrow \\ \text{rad } i & \longrightarrow & a_{ij} \end{array}$$

Elementet på position (i,j) finns i rad i och kolumn j.

En <u>kolumnvektor</u> är en matris med bara en kolumn. (Exempel: $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$)

En <u>radvektor</u> är en matris med bara en rad (Exempel: $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

En <u>kvadratisk matris</u> har lika många rader och kolumner

Huvuddiagonalen i en $n \times n$-matris utgörs av positionerna $(1,1), (2,2), \ldots, (n,n)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ 7 & -14 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Vi kan addera matriser av samma storlek.

Exempel: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

Vi kan multiplicera en <u>skalär</u> (finare ord för reellt tal) till en matris:

$$r \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \end{bmatrix}$$

Vi använder stora bokstäver för att beteckna matriser: $A, B, C, \ldots$

Matrismultiplikation

Inledande diskussion: Anta att vi har följande två ekvationssystem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = c_2 \end{cases}$$

Vi urskiljer följande komponenter:

En koefficientmatris, gemensam för bägge systemen: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Två vektorer med obekanta: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

Två vektorer med högerled: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Bilda nu matriser med obekanta och högerled:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Definiera nu <u>produkten</u> mellan A och X att vara

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{bmatrix}$$

Detta ger följande kompakta beskrivning av de två ekvationssystemen:

$$AX = B$$

Med matriserna utskrivna får vi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Observera följande:

* Rad r i matrisen B svarar mot rad r i matrisen A.
* Kolumn k i matrisen B svarar mot kolumn k i matrisen X.
* Position (r,k) i $B \leftrightarrow$ rad r i A och kolumn k i X.

Allmän definition av multiplikation: Låt A vara en matris av storlek $m \times n$, och låt X vara en matris av storlek $n \times p$.

* Antal <u>kolumner</u> i A måste vara lika med antal <u>rader</u> i X.

Produkten AX är den matris B av storlek $m \times p$ som har egenskapen att elementet på position (r,k) är

$$b_{rk} = a_{r1} x_{1k} + a_{r2} x_{2k} + \dots + a_{rn} x_{nk}$$

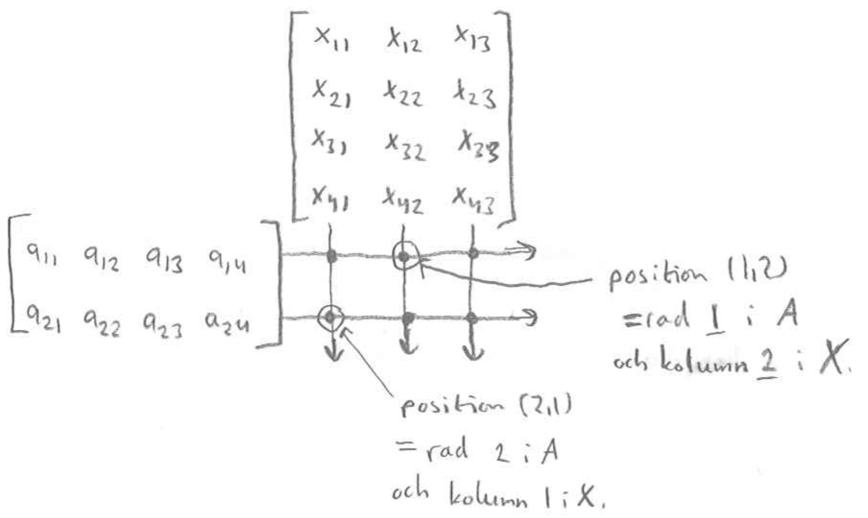
Exempel: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-7)} & \boxed{0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 8} & \boxed{0 \cdot 6 + (-1) \cdot (-9)} \\ \boxed{2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-7)} & \boxed{2 \cdot (-5) + (-3) \cdot 8} & \boxed{2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-9)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -8 & 9 \\ 29 & -34 & 39 \end{bmatrix}$$

Minnesregel:



Ett ekvationssystem kan alltså skrivas som en matrisekvation:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_{\text{Koefficientmatris}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Exempel: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 11x_4 = -9 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -9 \end{bmatrix}$

Algebraiska egenskaper hos matriser

Matrismultiplikation är inte kommutativ, dvs AB och BA är inte nödvändigtvis lika. Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

AB är inte ens definierad! Bara BA går att beräkna.

Räkneregler:

(a) $A+B = B+A$ (addition är kommutativ)

(b) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (addition är associativ)

(c) $A(BC) = (AB)C$ (mult. är associativ)

(de) $A(B+C) = AB+AC$ (distributiva lagar)

$(A+B)C = AC+BC$

Se sid 38 för fler regler.

Nollmatrisen av storlek $m \times n$ har nollor på alla positioner. Vi betecknar denna matris med 0. Exempel: 2×3-matris: $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Enhetsmatrisen av storlek $n\times n$ har ettor på huvuddiagonalen och nollor i övrigt. Enhetsmatrisen betecknas I_n eller bara I om n framgår av sammanhanget.

$$I_1 = [1] \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt A vara en $m\times n$-matris. Då gäller att

$$A I_n = I_m A = A.$$

Se sid 41 för illustration.

Inversen till en matris

En kvadratisk matris A är <u>inverterbar</u> med <u>invers</u> B om B är en kvadratisk matris som uppfyller $AB = BA = I$. Vi betecknar inversen med A^{-1}.

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Vi ser att

$$\begin{cases} AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Alltså är $B = A^{-1}$.

A är <u>singulär</u> om A saknar invers.

En kvadratisk matris kan bara ha en invers. Anta nämligen att

$$AB = BA = I \quad \text{och} \quad AC = CA = I.$$

Då gäller att

$$\begin{cases} B(AC) = BI = B \\ B(AC) = (BA)C = IC = C \end{cases} \Rightarrow B = C.$$

Observera att inversen till A^{-1} är A: $(A^{-1})^{-1} = A$

Inversen av 2×2-matris: Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Om $ad - bc \neq 0$, så gäller att

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Kontroll: Sätt $X = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Vi ser att

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{ad-bc}X$ är alltså inversen till A.

Om $ad-bc$, är A singulär och kan inte inverteras.

Anta att A och B är inverterbara matriser av samma storlek. Då är produkten AB inverterbar med inversen

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Vi har nämligen att

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Likaså är $(B^{-1}A^{-1})AB = I$.

För ett exempel, se sid 45.

Låt A vara en kvadratisk matris. Skriv $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ och så vidare; $A^n = A^{n-1}A$. Vi definierar $A^0 = I$.

Vi har följande räkneregler för ickenegativa tal r och s:

$$\begin{cases} A^r A^s = A^{r+s} \\ (A^r)^s = A^{rs} \end{cases}$$

Om A^{-1} existerar, sätter vi $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$, $A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}$ och så vidare. Inversen till A^n är då A^{-n}.

Elementära matriser (avsnitt 1.5)

En <u>elementär</u> matris är en matris som kan erhållas från enhetsmatrisen via en elementär radoperation:

Att multiplicera en ekvation med $r \neq 0$ svarar mot att ersätta ettan i motsvarande rad i I med r.

Exempel: $\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow r \\ \\ \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \leftarrow r \\ \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow r \end{array}$ (Matriserna visar resultatet <u>efter</u> de givna operationerna.)

Att byta plats på två ekvationer svarar mot att byta plats på motsvarande rader i I.

Exempel: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Att addera r gånger ekvation j till ekvation i svarar mot att ersätta nollan på position

Exempel: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \times r \\ + \\ \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} + \\ \times r \\ \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \times r \\ \\ + \end{array}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} + \\ \\ \times r \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & r & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \times r \\ + \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ + \\ \times r \end{array}$

Enhetsmatrisen är själv elementär.

Låt A vara en matris, och låt E vara en elementär matris med lika många kolumner som A. Då är EA den matris som erhålls om vi genomför den elementära radoperation som svarar mot matrisen E.

<u>Exempel</u> Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xleftarrow{\times} (1/2) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{E_1 A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times} (-1) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{E_1 A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2 E_1 A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ \xrightarrow{\times} (2) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2 E_1 A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3 E_2 E_1 A}$$

Vi ser att $E_3 E_2 E_1 A = I$, dvs $E_3 E_2 E_1 = A^{-1}$.
Notera att

$$E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta stämmer med vår tidigare formel för $A^{-1} = \dfrac{1}{\underbrace{2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1}_{2}} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Varje elementär radoperation har en invers operation:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xleftarrow{\times} (r) \sim \begin{bmatrix} ra & rb \\ c & d \end{bmatrix} \xleftarrow{\times} \underset{\text{invers operation}}{(1/r)} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circlearrowleft \sim \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \underset{\text{invers operation}}{\circlearrowleft} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times} (r) \\ \xleftarrow{} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c+ra & d+rb \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\times} (-r) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

invers operation

De inversa operationerna är också elementära radoperationer.

Om E svarar mot en given operation, så svarar E^{-1} mot den inversa operationen.

Exempel. $E = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad E^{-1} = E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{bmatrix}$

Föregående exempel: $E_3 E_2 E_1 A = I \iff A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$

$$\iff \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allmännare fall: Anta att vi kommit fram till att

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I \iff A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$$

Bilda matrisen $A \mid I$. Exempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ger $A \mid I = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Vi får då att

$$(E_k \cdots E_1)(A \mid I) = (E_k \cdots E_1 A) \mid (E_k \cdots E_1) I$$
$$= I \mid A^{-1}$$

Slutsats: Om vi genomför elementära radoperationer så att den vänstra halvan i $A \mid I$ blir enhetsmatrisen, så blir den högra halvan inversen A^{-1} till A.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & -12 \end{bmatrix}$

$$A \mid I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Detta ger alltså att $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

I ovanstående uträkning arbetade vi med tre olika högerled svarande mot de tre ekvationssystemen

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\qquad A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Man kan läsa av lösningarna till systemen i inversen A^{-1}. Första kolumnen i A^{-1} svarar exempelvis mot det första systemet:

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-4\\-2\end{bmatrix}$$

Exempel på allmänt högerled: $\begin{bmatrix}1&3\\-3&-7\\4&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

Totalmatris:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&3&a\\-3&-7&b\\4&14&c\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&3&a\\0&2&3a+b\\4&14&c\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&3&a\\0&2&3a+b\\0&2&-4a+c\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&3&a\\0&2&3a+b\\0&0&-7a-b+c\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&3&a\\0&1&\frac{3}{2}a+\frac{b}{2}\\0&0&-7a-b+c\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{7}{2}a-\frac{3}{2}b\\0&1&\frac{3}{2}a+\frac{b}{2}\\0&0&-7a-b+c\end{array}\right]\iff\begin{cases}x=-\frac{7}{2}a-\frac{3}{2}b\\y=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\\0=-7a-b+c\end{cases}$$

Systemet har lösning precis då $-7a-b+c=0\iff c=7a+b$.
Den unika lösningen blir i detta fall $\begin{cases}x=\frac{7}{2}a-\frac{3}{2}b\\y=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\end{cases}$

Transponaten av en matris (avsnitt 1.3 och 1.4)

Låt A vara en $m \times n$-matris. Transponaten A^T är den $n \times m$-matris som erhålls om vi byter plats på rader och kolumner. Elementet på position (r,k) i A hamnar på plats (k,r) i A^T.

Exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Notera att $I^T = I$, där I är enhetsmatrisen.

Räkneregler: $(A^T)^T = A \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$ och $(kA)^T = kA^T$.

Produktregel: $(AB)^T = B^T A^T$.

Studera nämligen följande schematiska uppställning av produkten $C = AB$:

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & C \end{array} \qquad \text{Exempel:} \quad \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 49 & 68 & 87 \end{bmatrix} \end{array}$$

Spegla längs diagonalen: $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & C \end{array} \xrightarrow{\text{spegla}} \begin{array}{c|c} & A^T \\ \hline B^T & C^T \end{array}$. Exempel: $\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 39 & 49 \\ 54 & 68 \\ 69 & 87 \end{bmatrix} \end{array}$

Detta ger $(AB)^T = C^T = B^T A^T$

Annan regel: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Vi har nämligen att

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{array}{c|c} & A^{-1} \\ \hline A & I \end{array} \xrightarrow{\text{spegla}} \begin{array}{c|c} & A^T \\ \hline (A^{-1})^T & I^T \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c|c} & A^T \\ \hline (A^{-1})^T & I \end{array} \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I,$$

dvs $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Speciella typer av inverser (avsnitt 1.7)

En diagonalmatris är en kvadratisk matris där alla element utanför huvuddiagonalen är noll:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Enhetsmatriser och kvadratiska nollmatriser är diagonalmatriser.

Observera att
$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Om $d_1, d_2, \ldots, d_k$ är nollskilda, existerar D^{-1} och är lika med

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Låt A vara en matris med n rader. Vi erhåller produkten DA genom att multiplicera rad r med d_r:
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 10 \\ -12 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

Låt A vara en matris med n kolumner. Vi erhåller matrisen AD genom att multiplicera kolumn k med d_k:
$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -12 \\ 2 & 0 \\ 10 & -18 \end{bmatrix}$$

Triangulära matriser: Se sid 68-69.

En symmetrisk matris A uppfyller $A = A^T$. Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

Om A och B är symmetriska, så är även $A+B$ och kA symmetriska.
Produkten AB är dock inte nödvändigtvis symmetrisk: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Inversen är symmetrisk: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ om $A^T = A$.
Slutligen är $A^T A$ symmetrisk: $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$.

Mer om ekvationssystem och matriser (avsnitt 1.6 + sid 17-19)

I ett homogent linjärt ekvationssystem är högerledet noll. Exempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Totalmatris: } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

Alla homogena system är lösbara, för vi kan alltid sätta alla obekanta lika med noll och få en lösning. Denna lösning är den triviala lösningen. Övriga lösningar är icke-triviala.

Ett homogent system med fler obekanta än ekvationer har alltid icke-triviala lösningar. Skriv nämligen systemet på reducerad trappstegsform. Några exempel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi har högst en ledande etta per ekvation, vilket ger färre ledande ettor än variabler. Någon variabel är alltså fri, vilket ger oändligt många lösningar

Sats (Theorem 1.6.4) Följande egenskaper är ekvivalenta för en $n \times n$-matris (antingen gäller alla eller ingen):

(a) A är inverterbar.

(b) Det homogena systemet $A\bar{x} = \bar{0}$ har bara den triviala lösningen.

(c) Om vi skriver A på reducerad trappstegsform, blir resultatet enhetsmatrisen I.

(d) A kan skrivas som en produkt av elementära matriser.

(e) Ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ är lösbar för varje högerled $\bar{b}$.

(f) Ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ har exakt en lösning för varje högerled $\bar{b}$.

Se sid 54-55 och 63 för bevis.

Om A är inverterbar, har $A\bar{x} = \bar{b}$ den unika lösningen $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

Bevis: Multiplicera från vänster med A^{-1}: $A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{b} \Leftrightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

Kontrollera att $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ är en lösning: $A(A^{-1}\bar{b}) = (AA^{-1})\bar{b} = \bar{b}$.

Varje linjärt ekvationssystem har antingen <u>ingen lösning</u>, <u>exakt en lösning</u> eller <u>oändligt många lösningar</u>.

<u>Bevis:</u> Det vi vill bevisa är att ett linjärt system med fler än en lösning måste ha oändligt många lösningar. Anta att ekvationen $A\bar{x}=\bar{b}$ har två <u>olika</u> lösningar $\bar{x}_1$ och $\bar{x}_2$. För varje val av skalärer c_1 och c_2 har vi då att

$$A(c_1\bar{x}_1+c_2\bar{x}_2)=c_1A\bar{x}_1+c_2A\bar{x}_2=c_1\bar{b}+c_2\bar{b}=(c_1+c_2)\bar{b}.$$

Om $c_1+c_2=1$, blir detta lika med $\bar{b}$, det vill säga $c_1\bar{x}_1+c_2\bar{x}_2$ är en lösning. Sätt $c_1=t$, $c_2=1-t$. Vi får $c_1+c_2=1$ och därmed en lösning

$$t\bar{x}_1+(1-t)\bar{x}_2=\bar{x}_2+t\underbrace{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}_{\text{nollskild, ty } \bar{x}_1\neq\bar{x}_2}$$

Olika t-värden ger olika lösningar, vilket innebär oändligt många lösningar.