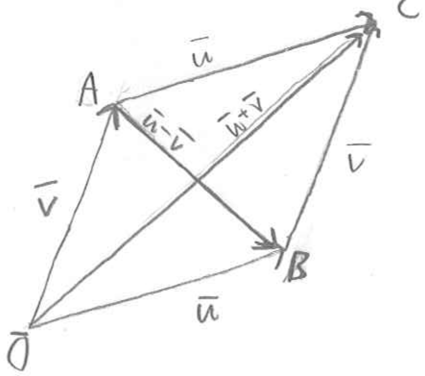
Använd vektorgeometri för att visa att diagonalerna i en romb skär varandra under rät vinkel (romb = parallellogram med alla sidor lika långa)



Lösning Placera ett av rombens hörn i origo. Inför vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ från origo till de två närmaste hörnen som i figuren. Diagonalerna blir nu (beteckningar som i figuren)

$$\overrightarrow{OC} = \bar{u}+\bar{v}$$
$$\overrightarrow{AB} = \bar{u}-\bar{v}$$

Skalärprodukten blir $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{v}$

$$= \|\bar{u}\|^2 - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{v} - \|\bar{v}\|^2$$
$$= \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2$$

Eftersom vi har en romb, är $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\|$, dvs $\|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2 = 0$, så skalärprodukten är 0, vilket innebär att diagonalerna är vinkelräta

Bonusproblem Låt d_1 och d_2 vara diagonalernas längder, och låt C vara rombens omkrets. Visa att

$$\sqrt{d_1^2+d_2^2} = \frac{C}{2}$$

Lösning Vi har att $d_1 = \|\bar{u}+\bar{v}\|$ och $d_2 = \|\bar{u}-\bar{v}\|$ (eller vice versa), så

$$d_1^2 + d_2^2 = \|\bar{u}+v\|^2 + \|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) + (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})$$
$$= [\text{räkna}] = (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v}) + \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v}$$
$$= 2\|\bar{u}\|^2 + 2\|\bar{v}\|^2 = \left[\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = \frac{C}{4}\right] = 2\left(\frac{C^2}{16}\right) + 2\left(\frac{C^2}{16}\right)$$
$$= \frac{1}{4}C^2 \quad \text{, dvs } \sqrt{d_1^2+d_2^2} = \frac{C}{2}$$

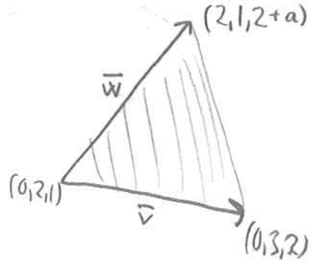
$(C = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\| + \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\| = 4\|\bar{u}\| = 4\|\bar{v}\|)$

③ V
3.5

Bestäm a så att triangeln med hörn i $(0,2,1)$, $(0,3,2)$ och $(2,1,2+a)$ får en så liten area som möjligt. Vad blir arean?

Lösning För att beräkna arean, bestämmer vi två av sidorna, uttryckta som vektorer $\bar{v}$ och $\bar{w}$:

$$\bar{v} = (0,3,2) - (0,2,1) = (0,1,1)$$
$$\bar{w} = (2,1,2+a) - (0,2,1) = (2,-1,1+a)$$



Arean ges av $\dfrac{\|\bar{v} \times \bar{w}\|}{2}$. Nu är

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1+a \end{vmatrix} = (a+2, 2, -2).$$

Arean blir alltså $\frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(a+2)^2}_{\substack{\text{som minst} \\ \text{då } a+2=0}} + 2^2 + (-2)^2}$, vilket blir minimalt

då $a=-2$, ty då blir $(a-2)^2 = 0$. Arean blir då

$$\frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Svar: $a=-2$ ger den minimala arean $\sqrt{2}$.

(4) ✓
4,5

Välj ut tre av följande vektorer så att vi får en bas för $\mathbb{R}^3$:

$(1,2,-3)$, $(2,4,-6)$, $(0,0,0)$, $(3,7,1)$, $(4,9,-2)$, $(0,2,20)$, $(1,3,5)$

<u>Lösning:</u> Observera att $(0,0,0)$ ej kan ingå i en bas.
Vidare är $(1,2,-3)$ och $(2,4,-6)$ parallella, så högst en av vektorerna kan ingå i en bas. Stryk $(2,4,-6)$.

enbart för att förenkla problemet!

Kvar:

$(1,2,-3)$, $(3,7,1)$, $(4,9,-2)$, $(0,2,20)$, $(1,3,5)$

Matris med vektorerna som kolonner:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Radoperationer påverkar <u>inte</u> linjära oberoenden mellan kolonnerna:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 20 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 20 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De inringade kolonnerna 1,2,5 är linjärt oberoende. Motsvarande kolonner i A ger tre vektorer som löser problemet:

$(1,2,-3)$, $(3,7,1)$, $(1,3,5)$

Obs: Det finns många andra lösningar.

Låt $B = \{\bar{v}_1 = (1,4),\ \bar{v}_2 = (2,5)\}$
$C = \{\bar{w}_1 = (3,6),\ \bar{w}_2 = (4,7)\}$

(a) Bestäm övergångsmatrisen P från basen B till basen C; $P[\bar{u}]_B = [\bar{u}]_C$

(b) Anta att $\bar{u}$ har koordinatvektorn $(1,2)$ i basen B. Vad blir koordinatvektorn i basen C?

<u>Lösning</u> (a) Låt E vara standardbasen. Vi har då att

$$\overbrace{P_{C\to E}}^{känd} P_{B\to C} = \overbrace{P_{B\to E}}^{känd}$$

Ty $P_{C\to E} P_{B\to C}[\bar{u}]_B = P_{C\to E}[\bar{u}]_C = [\bar{u}]_E$

Nu är $P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ och $P_{C\to E} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Vi ser att $P_{C\to E} P_{B\to C} = P_{B\to E}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} P_{B\to C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P_{B\to C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $[\bar{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [u]_C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

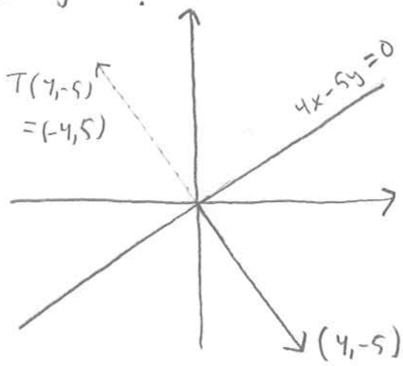
Kontroll: $\bar{u} = \underbrace{\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2}_{\text{i basen } B} = (1,4) + 2(2,5) = (5,14)$

samma!

$\bar{u} = 7\bar{w}_1 - 4\bar{w}_2 = 7(3,6) - 4(4,7) = (5,14)$

Svar: (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $4x-5y=0$.
Bestäm standardmatrisen för T.



Lösning. Vi kan skriva linjen som

$$(4,-5)\cdot(x,y)=0$$

Punkter på linjen avbildas på sig själva.
Exempel: $(5,4)$. $T(5,4)=(5,4)$
Punkter längs normalens riktning avbildas på minus sig själva.
Exempel: $(4,-5)$ $T(4,-5) = -(4,-5) = (-4,5)$

Låt A vara standardmatrisen. Då blir

$$A\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \quad \& \quad A\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}, \text{ dvs}$$

$$A\underbrace{\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & -5\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}5 & -4\\4 & 5\end{bmatrix}}_{C} \iff AB=C \iff A=CB^{-1}$$

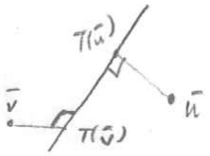
$$B^{-1}=\frac{1}{5\cdot(-5)-4\cdot 4}\begin{bmatrix}-5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{-41}\begin{bmatrix}-5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & -5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad CB^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -4\\4 & 5\end{bmatrix}\frac{1}{41}\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & -5\end{bmatrix}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}9 & 40\\40 & -9\end{bmatrix}$$

Alltså är den sökta matrisen $\frac{1}{41}\begin{bmatrix}9 & 40\\40 & -9\end{bmatrix}$

Låt $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $(x,y,z)=t(2,-1,3)$

Bestäm standardmatrisen för T.



Lösning 1. Sätt $\bar a=(2,-1,3)$. Vi har då att

$$T(\bar u) = \text{proj}_{\bar a}\,\bar u = \frac{\bar u\cdot \bar a}{\|\bar a\|^2}\,\bar a = \frac{(u_1,u_2,u_3)\cdot(2,-1,3)}{2^2+1^2+3^2}(2,-1,3)$$

$$= \frac{2u_1-u_2+3u_3}{14}(2,-1,3)$$

Vad gör T på basvektorer?

$$T(1,0,0) = \frac{2}{14}(2,-1,3) = \frac{1}{14}(4,-2,6)$$

$$T(0,1,0) = -\frac{1}{14}(2,-1,3) = \frac{1}{14}(-2,1,-3)$$

$$T(0,0,1) = \frac{3}{14}(2,-1,3) = \frac{1}{14}(6,-3,9)$$

Standardmatrisen blir $\Big[\,[T(1,0,0)]\;\;[T(0,1,0)]\;\;[T(0,0,1)]\,\Big]$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Lösning 2. Om $\bar u$ ligger på linjen, har vi $T(\bar u)=\bar u$, så $T(2,-1,3)=(2,-1,3)$.

Om $\bar u$ är ortogonal mot linjen, så är $T(\bar u)=\bar 0$.

$(1,2,0)$ och $(0,3,1)$ är ortogonala mot linjen:

$(1,2,0)\cdot(2,-1,3)=0$, $(0,3,1)\cdot(2,-1,3)=0$.

Alltså: $T(1,2,0)=(0,0,0)$, $T(0,3,1)=(0,0,0)$.

Låt A vara standardmatrisen. Vi får $A\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Bestäm en ortonormal bas för det delrum W till $\mathbb{R}^4$ som ges av lösningsmängden till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_4$

<u>Lösning</u> Först hittar vi en bas för W. Vi ser att

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3x_4 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{r+s+t}{3} \end{cases} \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) = r(1,0,0,\tfrac{1}{3}) + s(0,1,0,\tfrac{1}{3}) + t(0,0,1,\tfrac{1}{3})$$

En bas ges alltså av $\{(1,0,0,\tfrac{1}{3}), (0,1,0,\tfrac{1}{3}), (0,0,1,\tfrac{1}{3})\}$

Enklare: $\{\underbrace{(3,0,0,1)}_{\bar{u}_1}, \underbrace{(0,3,0,1)}_{\bar{u}_2}, \underbrace{(0,0,3,1)}_{\bar{u}_3}\}$

Ortogonalisera med Gram-Schmidt:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (3,0,0,1)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 = (0,3,0,1) - \frac{(0,3,0,1)\cdot(3,0,0,1)}{9+1}(3,0,0,1)$$

$$= (0,3,0,1) - \frac{1}{10}(3,0,0,1) = \frac{1}{10}(-3,30,0,9) = \frac{3}{10}(-1,10,0,3)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2}\bar{v}_2 = (0,0,3,1) - \frac{(0,0,3,1)\cdot(3,0,0,1)}{10}(3,0,0,1)$$

$$- \frac{(0,0,3,1)\cdot\frac{3}{10}(-1,10,0,3)}{(\frac{3}{10})^2(1^2+10^2+3^2)}\frac{3}{10}(-1,10,0,3)$$

$$= (0,0,3,1) - \frac{1}{10}(3,0,0,1) - \frac{3}{110}(-1,10,0,3)$$

$$= (0,0,3,1) - \frac{1}{10}(3,0,0,1) - \frac{3}{110}(-1,10,0,3)$$

$$= \frac{1}{110}(-30,-30,330,90) = \frac{1}{11}(-3,-3,33,9) = \frac{3}{11}(-1,-1,11,3)$$

Ortogonal bas: $\{(3,0,0,1), (-1,10,0,3), (-1,-1,11,3)\}$

Ortonormal bas: $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{110}}(-1,10,0,3), \frac{1}{\underset{\uparrow\; 1^2+1^2+11^2+3^2}{\sqrt{132}}}(-1,-1,11,3)$

8 ✓

8.4

Låt $B = \{(2,1),(1,4)\}$

$C = \{(1,1,2),(1,2,0),(0,2,1)\}$

Låt $T(x,y) = (x, x+y, x+2y)$

Uttryck matrisen för T i baserna B och C: $[T]_{C,B}[\bar{u}]_B = [T(\bar{u})]_C$

Lösning. Först beräknar vi T av basvektorerna i B:

$$T(2,1) = (2,3,4)$$

$$T(1,4) = (1,5,9)$$

Sedan försöker vi uttrycka dessa element i basen C. Ta en allmän vektor (a,b,c), uttryckt i standardbasen. För att få ut koordinatvektorn i basen C, använder vi oss av formeln

$$[\bar{u}]_C = P_{E\to C}[\bar{u}]_E = P_{E\to C}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Vi läser av

$$P_{E\to C}^{-1} = P_{C\to E} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{basvektorer i } C \end{array}$$

Invertering:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

Alltså är

$$P_{E\to C} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger att

$$[T(2,1)]_C = [(2,3,4)]_C = P_{E\to C}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$[T(1,4)]_C = [(1,5,9)]_C = P_{E\to C}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/5 \\ -10/5 \\ 15/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Den sökta matrisen är alltså

$$[T]_{C,B} = \begin{bmatrix} 9/5 & 3 \\ 1/5 & -2 \\ 2/5 & 3 \end{bmatrix}$$