Dimension (avsnitt 4.5)

Viktig egenskap hos vektorrum: Alla baser för ett vektorrum har lika många element.

Exempel $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om $n \times m$-matrisen med kolumner $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ har följande egenskap:

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_m \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ har unik lösning för varje högerled.

Endast möjligt om antalet ekvationer n = antalet obekanta m, dvs $m=n$.

Dimensionen av ett vektorrum är antalet vektorer i en bas för vektorrummet

---

Exempel: $\mathbb{R}^n$ har dimension n.

Exempel: Planet $x-5y+3z=0$ är ett vektorrum av dimension 2. Vi kan nämligen parametrisera planet:

$$\begin{cases} x = 5s-3t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \iff (x,y,z) = (5s-3t, s, t) = s(5,1,0) + t(-3,0,1)$$

Varje punkt i planet kan skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination av $(5,1,0)$ och $(-3,0,1)$, som därmed utgör en bas för planet.

Mer allmänt: Varje plan genom origo är ett vektorrum av dimension 2, för ett sådant plan kan skrivas på formen

$\bar{x} = s\bar{u} + t\bar{v}$, där s,t är parametrar och $\bar{u},\bar{v}$ är vektorer som inte är parallella.

Fakta om ett vektorrum V:

* Varje linjärt oberoende mängd i V kan utvidgas till en bas för V.

Exempel: $\bar{v}_1 = (1,2,1)$, $\bar{v}_2 = (2,0,1)$ är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^3$.
Hitta alla $\bar{v}_3 = (a,b,c)$ sådana att $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

Lösning: $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är en bas om och endast om matrisen A med kolonner $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är inverterbar, dvs $\det A \neq 0$. Nu är

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 2b + 2a - b - 4c = 2a + b - 4c$$

Om $2a + b - 4c \neq 0$, får vi alltså en bas. Vi kan exempelvis välja $\bar{v}_3 = (1,0,0)$.

* Varje mängd som spänner upp V kan reduceras till en bas för V.

Exempel: Välj ut tre av följande fem vektorer så att vi får en bas för $\mathbb{R}^3$:

$$(1,0,2), \ (2,1,1), \ (3,1,3), \ (5,2,4), \ (3,0,7)$$

Lösning. Bilda en matris med vektorerna som kolonner. Elementära radoperationer påverkar inte linjärt oberoende mellan kolonnerna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Här ser vi att kolonnerna 1, 2 och 5 är linjärt oberoende: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Motsvarande kolonner i den ursprungliga matrisen är då också linjärt oberoende: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$. En lösning (inte unik!) är alltså

$$\{(1,0,2), \ (2,1,1), \ (3,0,7)\}$$

Basbyten (avsnitt 4.6)

Exempel. Studera basen $B = \{(1,2), (-1,1)\}$. Låt $\bar{u} = (a,b)$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$. Uttryck $\bar{u}$ i basen B.

Lösning: Vi vill hitta (x,y) så att

$$\bar{u} = (a,b) = x(1,2) + y(-1,1) \qquad (*)$$

Koordinatvektorn för $\bar{u}$ i basen B blir då $(\bar{u})_B = (x,y)$.

Ekvationen $(*)$ på matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{vektorerna i } B \text{ som kolonner}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{sökt koordinatvektor}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\text{koordinatvektor i standardbasen}}$$

Invertera: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1\cdot 1 - (-1)\cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

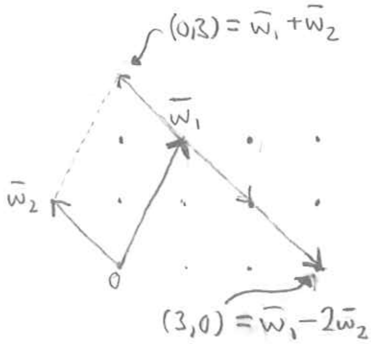
Vi får $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/3 + b/3 \\ -2a/3 + b/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)/3 \\ (-2a+b)/3 \end{bmatrix}$

Alltså är $(\bar{u})_B = \left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{-2a+b}{3} \right)$. Exempel $\begin{cases} (1,0)_B = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ (0,1)_B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$

Ännu ett problem med samma bas B:

Studera linjen $(x,y) = (1,-1) + t(2,1)$

Uttryck linjen i basen B.



Lösning: $(x,y) = (1+2t, -1+t)$

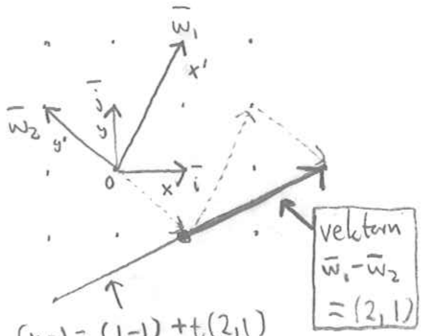
Ovanstående lösning ger att

$$(x,y)_B = (1+2t, -1+t)_B = \begin{bmatrix} a = 1+2t \\ b = -1+t \end{bmatrix} = \left(\frac{(1+2t)+(-1+t)}{3}, \frac{-2(1+2t)+(-1+t)}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{3t}{3}, \frac{-3-3t}{3} \right) = (t, -1-t) = (0,-1) + t(1,-1)$$

I den nya basen har linjen därmed ekvationen $(x', y') = (0,-1) + t(1,-1)$

Illustration: $\bar{w}_1 = (1,2)$, $\bar{w}_2 = (-1,1)$



$(x,y) = (1,-1) + t(2,1)$
$= -\bar{w}_2 + t(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)$

Om vi skriver $(x',y') = (x,y)_B$,
blir ekvationen

$$(x',y') = (0,-1) + t(1,-1),$$

ty $(x,y) = -\bar{w}_2 + t(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)$

Exempel: Låt $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
$C = \{(1,0,2), (3,1,10), (1,2,11)\}$

Anta att vi har en vektor $\bar{u}$ med koordinatvektorn (a,b,c) i basen C, dvs $(\bar{u})_C = (a,b,c)$.
Vad blir $\bar{u}$ i basen B?

Lösning: Att $(\bar{u})_C = (a,b,c)$ innebär att

$$(\bar{u})_B = \bar{u} = a(1,0,2) + b(3,1,10) + c(1,2,11)$$

ty B är standardbasen

Diskussion: Ovanstående på matrisform blir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad (\bar{u} = (u_1, u_2, u_3))$$

Vi skriver $P_{C \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

Detta är <u>övergångsmatrisen</u> från basen C till basen B:

$$[\bar{u}]_B = P_{C \to B} [\bar{u}]_C$$

Allmän formel: Låt $B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ och $C = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n\}$ vara två baser för ett vektorrum V.

Uttryck vektorerna $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n$ i basen B, och bilda kolonnvektorer av dessa:

$$[\bar{w}_1]_B \quad [\bar{w}_2]_B \quad \ldots \quad [\bar{w}_n]_B$$

Vi definierar <u>övergångsmatrisen</u> från C till B att vara

$$P_{C\to B} = \Big[\, [\bar{w}_1]_B \ \ldots \ [\bar{w}_n]_B \,\Big]$$

Vi har att $[\bar{u}]_B = P_{C\to B}[\bar{u}]_C$

$$\Leftrightarrow \quad [\bar{u}]_C = (P_{C\to B})^{-1}[\bar{u}]_B$$

<u>Sats</u>: $(P_{C\to B})^{-1} = P_{B\to C}$.

I vårt exempel var $P_{C\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ i basen B

Invertering ger

$$P_{B\to C} = (P_{C\to B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}^{-1} = [\text{räkna på}]$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -23 & 5 \\ 4 & 9 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempelvis har vi för $\bar{u} = (\bar{u})_B = (1,0,0)$ att

$$[\bar{u}]_C = P_{B\to C}[\bar{u}]_B = \begin{bmatrix} -9 & -23 & 5 \\ 4 & 9 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $-9(1,0,2) + 4(3,1,10) - 2(1,2,11) = (1,0,0)$.

Exempel: $B = \{\bar{v}_1 = (2,1),\ \bar{v}_2 = (0,2)\}$, $C = \{\bar{w}_1 = (3,4),\ \bar{w}_2 = (2,2)\}$
Vad blir $P_{B \to C}$?

Lösning: $P_{B\to C} = \big[[\bar{v}_1]_C \quad [\bar{v}_2]_C \big]$

$[v_1]_C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, där $\bar{v}_1 = a\bar{w}_1 + b\bar{w}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$[v_2]_C = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, där $\bar{v}_2 = c\bar{w}_1 + d\bar{w}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Alltså är $P_{B\to C} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, där

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Totalmatris: $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & -5/3 & 2 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2/3 & -5/3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad P_{B\to C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5/2 & -3 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $\bar{u} = (2,1) = \bar{v}_1$. Då är $[\bar{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[\bar{u}]_C = P_{B\to C}[\bar{u}]_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5/2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$(-1)\bar{w}_1 + \left(\tfrac{5}{2}\right)\bar{w}_2 = -1(3,4) + \tfrac{5}{2}(2,2) = (-3+5, -4+5) = (2,-1) = \bar{u}$$

På samma sätt: $\bar{u} = (0,2) = \bar{v}_2$ ger $[\bar{u}]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, och
$2\bar{w}_1 - 3\bar{w}_2 = 2(3,4) - 3(2,2) = (0,2) = \bar{u}$.

Radrum, kolonnrum och nollrum (avsnitt 4.7–4.8)

Låt A vara en $m \times n$-matris.
Raderna i A spänner upp ett delrum till $\mathbb{R}^n$, radrummet till A.
Kolumnerna i A spänner upp ett delrum till $\mathbb{R}^m$, kolonnrummet till A.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Radrummet spänns upp av $(2,5,1,0)$ och $(1,-2,0,3)$.
Kolonnrummet spänns upp av $(2,1)$, $(5,-2)$, $(1,0)$, $(0,3)$

Lösningsmängden till ekvationen $A\bar{x} = \bar{0}$ är nollrummet till A.

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/9 & -2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/9 & -2/3 \end{bmatrix}$,

så $A\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{cases} x_1 + \frac{2}{9}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{9}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{9}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{9}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \end{cases}$

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$. Vi får $x_1 = -\frac{2}{9}s - \frac{5}{3}t$ och $x_2 = -\frac{1}{9}s + \frac{2}{3}t$,
dvs $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{2}{9}s - \frac{5}{3}t, -\frac{1}{9}s + \frac{2}{3}t, s, t)$
$= s(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 1, 0) + t(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1)$

Nollrummet spänns alltså upp av $(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, 1, 0)$ och $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1)$.

Låt A vara en matris på reducerad trappstegsform.

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(kolumner med ledande ettor är inringade)

Bas för radrummet = alla nollskilda rader:

$\{(1,-1,0,0,0,-1,3),\ (0,0,1,0,0,0,1),\ (0,0,0,1,0,2,0)\}$

Bas för kolonnrummet = kolumner med ledande ettor:

$\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0)\}$

Bas för nollrummet = en vektor för varje parameter i lösningen till $A\bar{x} = \bar{0}$, en för varje kolumn utan ledande etta (kolumner 2, 5, 6, 7):

$x_2 = r, \quad x_5 = s, \quad x_6 = t, \quad x_7 = u$

$$\begin{array}{ccccccc} & r & & & s & t & u \\ \hline x_1 & - x_2 & & & & - x_6 & + 3x_7 = 0 \\ & & x_3 & & & & + x_7 = 0 \\ & & & x_4 & & + 2x_6 & = 0 \end{array} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x_6 - 3x_7 \\ x_3 = -x_7 \\ x_4 = -2x_6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = r + t - 3u \\ x_3 = -u \\ x_4 = -2t \end{cases} \iff \bar{x} = (r+t-3u, r, -u, -2t, s, t, u)$$

$$= r\,\overbrace{(1,1,0,0,0,0,0)}^{\bar{v}_1} + s\,\overbrace{(0,0,0,0,1,0,0)}^{\bar{v}_2}$$

$$+ t\,(1,0,-2,0,0,1,0) + u\,(-3,0,-1,0,0,0,1) =$$

$= r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 + u\bar{v}_4$. En bas ges av $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$.

Observera: dimensionen för radrummet = dimensionen för kolumnrummet = 3. Dimensionen för nollrummet = antal kolumner minus dimensionen för radrummet = $7 - 3 = 4$. Alltid sant.

För en allmän matris A: Genomför elementära radoperationer för att få matrisen på reducerad trappstegsform: Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Radrummet påverkas inte av radoperationer.
En bas för A:s radrum ges av de nollskilda raderna i B:

$$\{(1,0,1,1,3),\ (0,1,1,2,0)\}$$

Nollrummet påverkas inte av radoperationer.
En bas för A:s nollrum erhålls ur lösningen på $B\bar{x}=\bar{0}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = u \\ x_1 = -s-t-3u \\ x_2 = -s-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s-t-3u,\ -s-2t,\ s,\ t,\ u)$$

$$= s(-1,-1,1,0,0) + t(-1,-2,0,1,0) + u(-3,0,0,0,1)$$

Bas: $\{(-1,-1,1,0,0),\ (-1,-2,0,1,0),\ (-3,0,0,0,1)\}$

Kolonnrummet påverkas av radoperationer, men linjära oberoenden mellan kolonnerna bevaras.
En bas för kolonnrummet för B ges av kolonnerna med ledande ettor. I exemplet har kolonnerna 1 och 2 ledande ettor. Motsvarande kolonner i A utgör då en bas för kolonnrummet för A: kolonn $1 = (1,0,2)$, kolonn $2 = (2,1,1)$. Bas $= \{(1,0,2),\ (2,1,1)\}$.

<u>Rangen</u> för en matris är dimensionen av radrummet.

I exemplet har vi rangen 2. Detta är även dimensionen för kolonnrummet. Dimensionen av nollrummet är 3, alltså antalet kolonner i matrisen minus rangen.

<u>Sats</u> Låt A vara en $m \times n$-matris. Då är

$$\dim(\text{nollrummet}) + \text{rangen} = n = \text{antal kolonner}$$

och

$$\text{rangen} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per} \\ \text{definition}}}{=} \dim(\text{radrummet}) = \dim(\text{kolonnrummet})$$

Beviset är att skriva om A på reducerad trappstegsform B:

$$\begin{aligned} \text{rang} &= \text{antal nollskilda rader i } B = \text{antal ledande ettor} \\ &= \dim(\text{kolonnrummet}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim(\text{nollrummet}) &= \text{antal parametrar i lösningen till } B\bar{x} = \bar{0} \\ &= \text{antal kolonner } \underline{\text{utan}} \text{ ledande ettor} \\ &= \text{antal kolonner minus rangen.} \end{aligned}$$