Ortogonala matriser (avsnitt 7.1)

sid 389 En matris A är ortogonal om $A^{-1} = A^T$, dvs $AA^T = A^TA = I$

Exempel. Låt a och b vara tal sådana att $a^2+b^2=1$. Då är $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ortogonal. Vi har nämligen att

$$A^TA = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Exempelvis är matrisen för rotation med vinkeln θ ortogonal: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

sid 390 Sats A är ortogonal $\Leftrightarrow$ Raderna i A utgör en ortonormal bas för $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ Kolonnerna i A —"— —"—

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & -1/\sqrt{35} & -3/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{14} & 5/\sqrt{35} & 0 \\ 3/\sqrt{14} & -3/\sqrt{35} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{5} & 5\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{5} & -3\sqrt{2} & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

sid 391 Sats: (a) Om A är ortogonal, så är även $A^{-1} = A^T$ ortogonal
(b) Om A och B är ortogonala, så är AB ortogonal,
(c) Om A är ortogonal, så $\det A = 1$ eller $\det A = -1$

Exempelvis har vi: (b) att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T$

Ortogonala matriser bevarar norm och skalärprodukt:

$(A\bar{x})\cdot(A\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{y}$ (ty $(A\bar{x})\cdot(A\bar{y}) = \bar{x}^T \underbrace{A^TA}_{I} \bar{y} = \bar{x}^T\bar{y} = \bar{x}\cdot\bar{y}$)

$\bar{x} = \bar{y}$ ger $\|A\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$

Enbart ortogonala matriser har dessa egenskaper för alla $\bar{x}$ och $\bar{y}$.

Därför är matriser för speglingar och rotationer ortogonala.

Allmänt säger vi att $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en ortogonal operator om dess matris A är ortogonal.

sid 392-393 Basbyten mellan ortonormala baser är enkla att hantera

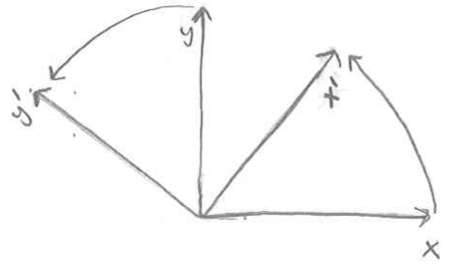
Exempel. Låt $B = \{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})\}$ och $E = \{(1,0), (0,1)\}$

Då är övergångsmatrisen från B till E lika med

$$P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad P_{E\to B} = (P_{B\to E})^T = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

så om $\bar{u}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i basen E och koordinaterna $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ i basen E, gäller

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}}_{P_{E\to B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{i basen } E} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{\text{i basen } B} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}}_{P_{B\to E}} \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{\text{i basen } B} = \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{i basen } E}$$



Om det $P = +1$, utgör basbytet en rotation av koordinatsystemet

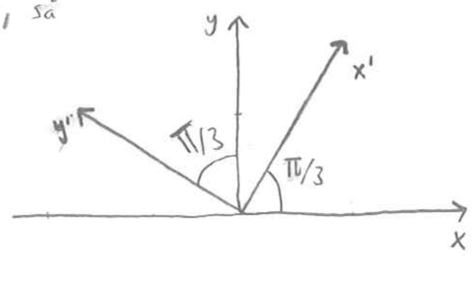
Om det $P = -1$, kan vi byta plats på två kolumner i P och på så sätt få en rotation.

Om exempelvis $P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, så är det $P = -1$

Byte av kolumner ger en ny matris $\hat{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, och det $\hat{P} = +1$

Observera att $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, så

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \cos \pi/3 & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin \pi/3 & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$



Ortogonal diagonalisering (avsnitt 7.2)

sid 397 En matris A är ortogonalt diagonaliserbar om det finns en ortogonal matris P sådan att $P^TAP = P^{-1}AP = D$ är en diagonalmatris.

Obs: $P^TAP = D \Leftrightarrow PP^TAPP^T = PDP^T \Leftrightarrow A = PDP^T$

Vi har att varje ortogonalt diagonaliserbar matris A är symmetrisk: $A = A^T$. Bevis:

$$A^T = (PDP^T)^T = \underbrace{(P^T)^T}_{=P} \underbrace{D^T}_{=D} P^T = PDP^T = A.$$

sid 398 Sats Varje symmetrisk matris är ortogonalt diagonaliserbar, och alla egenvärden är reellvärda.

Exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$. Hitta en ortogonal diagonalisering av A.

Lösning: Vi diagonaliserar som i kapitel 5, men vi normerar även alla egenvektorer och ser till att de utgör en ortonormal bas. Karakteristiskt polynom:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+5) - 16$$
$$= \lambda^2 + 4\lambda - 5 - 16 = \lambda^2 + 4\lambda - 21$$

Nollställen: $\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm \sqrt{25} = -2 \pm 5$, dvs $\lambda = -7$ och $\lambda = 3$ är nollställena.

Egenvektorer sökes:

$\lambda = -7$ ger $(-7I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow -4x - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (-2t, t) = t(-2,1)$

Normera: $\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(-2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$

Den ena normerade egenvektorn är alltså $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$

Om allt går som det ska, finns en egenvektor som är ortogonal mot denna.

$\lambda = 3$ ger $(3I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = t(1,2)$

Normera: $\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

Mycket riktigt är denna ortogonal mot $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$.

Om vi sätter $P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, får vi att

den nya basen uttryckt i standardbasen

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{P_{E\to B}\,[T_A]_{E,E}\,P_{B\to E}}_{[T_A]_{B,B}}$$

Ännu ett exempel: Låt $A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$

Hitta en ortogonal diagonalisering av A.

Lösning: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-10 & 6 & -2 \\ 6 & \lambda-5 & -3 \\ -2 & -3 & \lambda-13 \end{vmatrix} = [\text{räkna, räkna}]$

$= \lambda^3 - 28\lambda^2 + 196\lambda = \lambda(\lambda^2 - 28\lambda + 196)$

$= \lambda(\lambda - 14)^2$

Två egenvärden: $\lambda = 14$ och $\lambda = 0$

Hitta egenvektorer:

$\lambda = 14$ ger $(14I - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow -2x - 3y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2s + 3t \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = s(1,0,2) + t(0,1,3)$

Vi får därmed två egenvektorer med egenvärde 14:
$\bar{u}_1 = (1,0,2)$, $\bar{u}_2 = (0,1,3)$. De är dock inte ortogonala.
Detta ordnar vi med Gram-Schmidt:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (1,0,2)$$
$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2\cdot\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 = (0,1,3) - \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2}{1^2+0^2+2^2}(1,0,2)$$
$$= (0,1,3) - \frac{6}{5}(1,0,2) = \frac{1}{5}(-6,5,3)$$

Två ortogonala egenvektorer: $(1,0,2)$ och $(-6,5,3)$
Normering ger vektorerna $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$ och $\frac{1}{\sqrt{36+25+9}}(-6,5,3)$
$= \frac{1}{\sqrt{70}}(-6,5,3)$

$\lambda = 0$ ger $(0\cdot I - A)\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -10 & 6 & -2\\ 6 & -5 & -3\\ -2 & -3 & -13\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Övning: Detta system har lösningen $(x,y,z) = t(2,3,-1)$.
En egenvektor är alltså $(2,3,-1)$.
Normering ger $\frac{1}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$

En ortonormal bas av egenvektorer ges av
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2),\ \frac{1}{\sqrt{70}}(-6,5,3),\ \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)\right\} \quad \text{(kontrollera!)}$$

Matrisen $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -6/\sqrt{70} & 2/\sqrt{14}\\ 0 & 5/\sqrt{70} & 3/\sqrt{14}\\ 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} & -1/\sqrt{14}\end{bmatrix}$ har egenskapen att

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Kvadratiska former (avsnitt 7.3)

sid 405-406 **En kvadratisk form** i $\mathbb{R}^2$ i variablerna x och y är ett uttryck på formen $ax^2 + by^2 + cxy$, där a, b, c är konstanter.

En kvadratisk form i $\mathbb{R}^3$ i variablerna x, y och z har formen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

där a, b, c, d, e, f är konstanter.

Allmänt i $\mathbb{R}^n$ med variablerna $x_1, \ldots, x_n$: En summa av termer på formen $a_{ij} x_i x_j$.

Notera att $ax^2 + by^2 + cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

och $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Omvänt:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by & bx + dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + byx + bxy + dy^2 = ax^2 + bxy + cy^2$$

För en symmetrisk $n \times n$-matris A definierar vi

$$Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}.$$

Detta är den kvadratiska formen associerad med A

sid 407 Vi genomför ett variabelbyte genom formeln $\bar{x} = P\bar{y}$, där P är en inverterbar $n \times n$-matris. Notera att

$$\bar{x}^T A \bar{x} = (P\bar{y})^T A (P\bar{y}) = \bar{y}^T P^T A P \bar{y}$$

Anta nu att P är en ortogonal matris som diagonaliserar A, dvs

$$P^T A P = D,$$

där D är en diagonalmatris; $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Då är

$$\bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T P^T A P \bar{y} = \bar{y}^T D \bar{y} =$$

$$= [y_1 \ \ y_2 \ \cdots \ y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Exempel. Låt $Q = x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$. Då är

$$Q = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 8/2 \\ 8/2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ \ x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Tidigare räknade vi ut att $P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ har egenskapen att $P^T A P = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

egenvektorer till A

Sätt $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

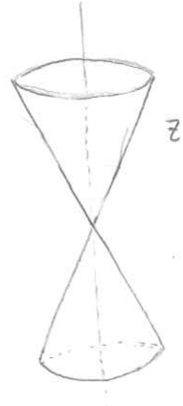
Vi får att

$$Q = \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T (P^T A P) \bar{y} = [y_1 \ \ y_2] \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= -7y_1^2 + 3y_2^2.$$

sid 408-409

Kägelsnitt (conics)



Kägelsnitt är kurvor som uppstår när man skär en kägla (se figur till höger) med ett plan.

Exempel på kägelsnitt: Kurvor på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$$

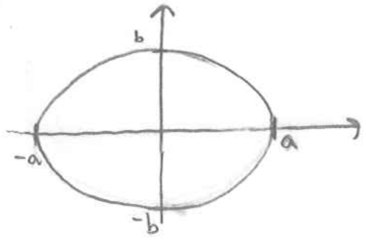
Dessa är centrala kägelsnitt (origo ligger i centrum). Om $b=0$, dvs

$$ax^2 + cy^2 + d = 0,$$

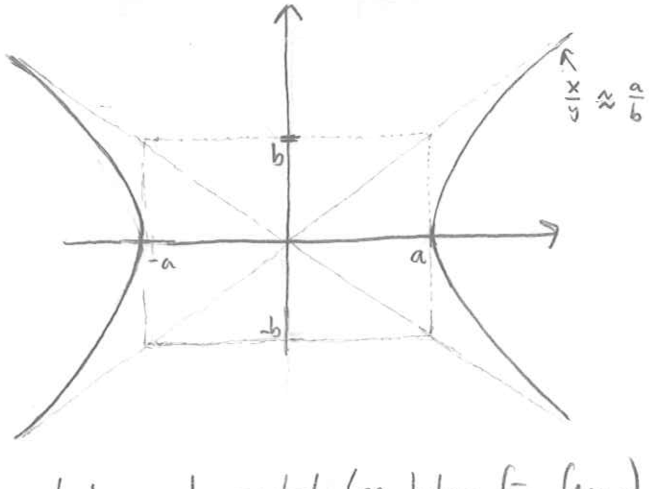
säger vi att kägelsnittet är i standardposition.

Viktiga kägelsnitt i standardposition ($a>0$, $b>0$):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Detta är en ellips med axellängder a och b:



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Detta är en hyperbel:



$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ Detta är också en hyperbel (se boken för figur)

Exempel: Avgör vilken typ av kägelsnitt som utgörs av kurvan

$$Q = 14x^2 - 6xy + 6y^2 - 25 = 0$$

Ange kägelsnittet i standardposition via lämpligt koordinatbyte.

Lösning: Vi kan skriva $Q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 25$, $\boxed{-6/2}$

Sätt $A = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

Vi ser att $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & 3 \\ 3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 14)(\lambda - 6) - 9$

$= \lambda^2 - 20\lambda + 84 - 9 = \lambda^2 - 20\lambda + 75$

Lös $\lambda^2 - 20\lambda + 75 = 0 \iff \lambda = 10 \pm \sqrt{100 - 75} = 10 \pm \sqrt{25}$

$\iff \lambda = 10 \pm 5$, så $\lambda = 15$ och $\lambda = 5$

Egenvektorer: $\underline{\lambda = 15}$ $\quad 15I - A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, och $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\iff x + 3y = 0 \iff \begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases} \iff (x, y) = t(-3, 1)$.

$\underline{\lambda = 5}$ $\quad 5I - A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, och $\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$

$\iff 3x - y = 0 \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases} \iff (x, y) = t(1, 3)$

Egenvektorer: $(-3, 1)$ och $(1, 3)$. Normering ger

$\frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$ och $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$. Sätt $P = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$

Vi får att $P^T A P = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Variabelbytet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ger

$$Q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 25 = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 25$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 25 = 15(x')^2 + 5(y')^2 - 25$$

Alltså: $Q = 0 \iff 15(x')^2 + 5(y')^2 = 25$

$$\iff \frac{15}{25}(x')^2 + \frac{5}{25}(y')^2 = 1 \iff \frac{3}{5}(x')^2 + \frac{1}{5}(y')^2 = 1$$

Detta är en <u>ellips</u> med axellängder $\sqrt{5/3}$ och $\sqrt{5}$.

sid 412-413 Om $\bar{x}^T A \bar{x} > 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$, säger vi att den kvadratiska formen $\bar{x}^T A \bar{x}$ är positivt definit. Detsamma säger vi om matrisen A.

Om $\bar{x}^T A \bar{x} < 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$, så är $\bar{x}^T A \bar{x}$ negativt definit.

Om $\bar{x}^T A \bar{x}$ antar både positiva och negativa värden, så är $\bar{x}^T A \bar{x}$ indefinit.

Sats Positivt definit precis då alla egenvärden till A är positiva.
Negativt definit — " — — " — negativa.
Indefinit om det finns minst ett positivt och minst ett negativt egenvärde

2x2-matriser: Om A är positivt definit, så är $\bar{x}^T A \bar{x} = 1$ en ellips.
Om A är indefinit, så är $\bar{x}^T A \bar{x} = 1$ en hyperbel

sid 414 Test för att en symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ är positivt definit:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{övre vänstra} \\ \text{hörnet}}}{a > 0}, \quad \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}}_{\substack{\text{övre vänstra} \\ 2\times2\text{-matrisen}}} > 0, \quad \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} > 0$$

Alla olikheter gäller $\Leftrightarrow$ A är positivt definit.
Kan generaliseras till $n \times n$-matriser, se sid 414.

Exempel: För vilka a är $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ positivt definit?

Lösning
Notera först att $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4$ och $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - 5a$.

Ovanstående test ger att A positivt definit $\Leftrightarrow$ $a > 0$, $a^2 - 4 > 0$, $a^3 - 5a > 0$

$\boxed{a > 0}$ ger att $\begin{cases} a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 4 \Leftrightarrow \boxed{a > 2} \\ a^3 - 5a > 0 \Leftrightarrow a^3 > 5a \Leftrightarrow a^2 > 5 \Leftrightarrow \boxed{a > \sqrt{5}} \end{cases}$

Vi ser alltså att A är positivt definit precis då $a > \sqrt{5}$