Bildrum och ortogonalt komplement (5.1 och 3.3)

(a) Bestäm en bas för bildrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till bildrummet.

Lösning (a) Bildrummet im(A) spänns upp av kolonnerna i A.
Radoperationer ger beroenden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att kolonn 1 och 2 är linjärt oberoende, medan övriga kolonner är kombinationer av de två första.
En bas för im(A) är alltså

$$B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Det ortogonala komplementet $(\mathrm{im}\,A)^\perp$ till im(A) ges av alla vektorer $\vec{x}$ så att $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ för alla $\vec{v}$ i im(A).
Gäller precis då $\vec{x} \cdot \vec{v}_1 = 0$ och $\vec{x} \cdot \vec{v}_2 = 0$, ty $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ är en bas för im(A). Vi ser att

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \text{och} \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4$$

Detta ger systemet $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dvs } \begin{matrix} x_1 & - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 & + x_4 = 0 \end{matrix}, \text{ så}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 2t \\ -t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En bas för $(\mathrm{im}\,A)^\perp$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ortogonal projektion på ett delrum (5.1)

(a) Bestäm en ortonormal bas för planet $3x+5y-z=0$ i $\mathbb{R}^3$

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ på planet i (a)

Lösning. (a) $3x+5y-z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3s+5t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}$$

En bas för planet är alltså $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix} \right\}$

Gram-Schmidt ger ortonormal bas:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix} - \frac{15}{10}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/2\\1\\1/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Normering: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ $\quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$

<u>Svar</u> $\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix} \right\}$

(b) Formeln för ortogonal projektion av en vektor $\vec{v}$ på planet ges av

$$T(\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{u}_1)\,\vec{u}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{u}_2)\,\vec{u}_2.$$

$\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ger

$$T(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1\cdot1+2\cdot0+3\cdot3)\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{14}}(1\cdot(-3)+2\cdot2+3\cdot1)\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + \frac{4}{14}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\\4\\23\end{bmatrix}$$

<u>Svar</u> $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\\4\\23\end{bmatrix}$

Minsta kvadratmetoden (5.4)

En boll kastas ut från Turning Torso. Man beräknar sedan hur långt bollen fallit efter 1, 2 och 3 sekunder; se tabell. Enligt en modell är

tid t	sträcka s
1 s	8 m
2 s	26 m
3 s	53 m

$$s = \frac{t^2}{2} g + t v_0 \quad (*)$$

där
- s = fallen sträcka i meter
- t = tid i sekunder
- g = tyngdaccelerationen
- v_0 = vertikal utgångshastighet i m/s

Visa hur g och v_0 kan uppskattas med minsta kvadratmetoden.

Lösning. Mätvärdena och $(*)$ ger ekvationerna

$$\begin{cases} 8 = \frac{1^2}{2} g + 1 \cdot v_0 & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} g + v_0 = 8 \\ 26 = \frac{2^2}{2} g + 2 v_0 & \Leftrightarrow \quad 2g + 2v_0 = 26 \\ 53 = \frac{3^2}{2} g + 3 v_0 & \Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} g + 3v_0 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9/2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 53 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Minsta kvadratlösningen till systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ får vi genom att multiplicera med A^T från vänster:

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 53 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 49/2 & 18 \\ 18 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 589/2 \\ 219 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} g \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49/2 & 18 \\ 18 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 589/2 \\ 219 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 14 & -18 \\ -18 & 49/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 589/2 \\ 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 181 \\ 129 \end{bmatrix}, \text{ dvs } \begin{cases} g = 181/19 \approx 9{,}53 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 129/19 \approx 3{,}39 \text{ m/s} \end{cases}$$

Minsta kvadratmetoden (5.4)

Använd minsta kvadratmetoden för att hitta den linjärkombination $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ som ligger närmast vektorn $\vec{b}$, där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}$$

Lösning. Vi vill hitta bästa approximationen till ekvationen

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix} \iff \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\2&2\\0&1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

MK-lösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$ får vi genom multiplikation med A^T:

$$A^TA\vec{x} = A^T\vec{b} \iff \begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\11\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}5&4&12\\4&5&11\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\4&5&11\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\0&9&7\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\0&1&7/9\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&0&16/9\\0&1&7/9\end{array}\right], \text{ dvs}$$

$$\begin{cases} x_1 = 16/9 \\ x_2 = 7/9 \end{cases}$$

Den sökta linjärkombinationen är

$$\frac{16}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \frac{7}{9}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16/9\\32/9+14/9\\7/9\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}16\\46\\7\end{bmatrix} = \underline{\underline{\text{Svar}}}$$

[Notera att $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ spänner upp planet genom origo med normal $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$, dvs $2x-y+2z=0$

$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}16\\46\\7\end{bmatrix}$ är den vektor i planet närmast $\vec{b} = \begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}$.]

Cramers regel (3×3-fallet) (6.3)

Låt $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$ vara en inverterbar 3×3-matris.
För varje högerled $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^3$ har ekvationen $A\vec{x} = \vec{b}$
den unika lösningen

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{b} & \vec{v}_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{b} \end{vmatrix}$$

Exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 3 = \boxed{-5},$$

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (1-4) \cdot 4 = \boxed{-12}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{b} & \vec{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 - 6 = \boxed{-1}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(4-1) = \boxed{9}$$

Så $x_1 = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$, $x_2 = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{9}{-5} = -\frac{9}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(forts.)

(forts)

Varför fungerar Cramers regel?

Vi har att $A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{b}$

$$\iff x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{b}$$

Alltså är $\left|\vec{b} \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right| = \left|(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right|$

$-x_2$

$$= \left|(x_1\vec{v}_1 + x_3\vec{v}_3) \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right|$$

$-x_3$

$$= \left|x_1\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right| = x_1\left|\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right| = x_1 \det A$$

dvs $x_1 = \dfrac{1}{\det A}\left|\vec{b} \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right|$

På samma sätt fungerar $\left|\vec{v}_1 \quad \vec{b} \quad \vec{v}_3\right|$ och $\left|\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{b}\right|$

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A\vec{x} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 0 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{b} = A\vec{x}$ ger $\left|\vec{b} \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3\right| = \begin{vmatrix} (x_1 + 2x_2 + x_3) & 2 & 1 \\ (0 + x_2 - x_3) & 1 & -1 \\ (3x_1 + 0 + 4x_3) & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x_1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$-x_2$ $\quad$ $-x_3$

$$= x_1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = x_1 \det A$$

Egenvärden (7.2)

Bestäm alla tripplar (a,b,c) sådana att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$ har egenvärdet 2.

Lösning $A\vec{x} = 2\vec{x}$ har nollskilda lösningar precis då

$A - 2I_3$ är inverterbar, dvs $\det(A - 2I_3) = 0$. Nu är

$$\det(A - 2I_3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ a & b & c-2 \end{vmatrix} = 4(c-2) + a - (-2)b = a + 2b + 4c - 8,$$ dvs

$$a + 2b + 4c - 8 = 0$$

Alla (a,b,c) som uppfyller denna ekvation löser problemet.

[Notera att $a + 2b + 4c - 8 = 0 \iff \begin{cases} a = -2s - 4t + 8 \\ b = s \\ c = t \end{cases}$, dvs

$(a, b, c) = (-2s - 4t + 8, s, t)$, där

s och t är godtyckliga parametrar.]

Allmännare: när har $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ egenvärdet λ?

Svar: Då $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Vi ser att

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(c - \lambda) + a - (-\lambda)b = -\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a.$$

A har alltså egenvärdet λ precis då $a + b\lambda + c\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

Egenvärden (7.2)

Låt $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att

$$T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_2) = 8\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Bestäm alla egenvärden till T, alltså alla λ så att ekvationen $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ har en nollskild lösning $\vec{x}$.

Lösning Anta att $\vec{x}$ är en nollskild lösning till ekvationen $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Uttryck $\vec{x}$ i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

$$\vec{x} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$$

Då är $T(\vec{x}) = T(y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2) = y_1 T(\vec{v}_1) + y_2 T(\vec{v}_2)$

$$= y_1(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) + y_2(8\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$= (y_1 + 8y_2)\vec{v}_1 + (2y_1 + y_2)\vec{v}_2 \quad ,$$

och $\quad \lambda\vec{x} = \lambda y_1\vec{v}_1 + \lambda y_2\vec{v}_2$

Vi får systemet $\begin{cases} y_1 + 8y_2 = \lambda y_1 \\ 2y_1 + y_2 = \lambda y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)y_1 + 8y_2 = 0 \\ 2y_1 + (1-\lambda)y_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$ som har nollskild lösning

precis då $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) = \pm 4$

$\Leftrightarrow \lambda = 5$ eller $\lambda = -3$

Svar: $\lambda = 5$ eller $\lambda = -3$

Diagonalisering. (7.4)

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -4 \end{bmatrix}$. (a) Hitta en diagonalmatris D så att $D = S^{-1}AS$ för någon matris S (som inte behöver beräknas)

(b) Beräkna A^{2011}.

Lösning. Vi beräknar egenvärdena:

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -3 & 10 & -4-\lambda \end{vmatrix} \cdot(-3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1+3\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \cdot(1-\lambda)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4+(3-\lambda)(1-\lambda) & 2-(1-\lambda) \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1+3\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2-4\lambda-1 & 1+\lambda \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1+3\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad = -(-1)\begin{vmatrix} \lambda^2-4\lambda-1 & 1+\lambda \\ 1+3\lambda & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= +\,(\lambda^2-4\lambda-1)(-(1+\lambda)) - (1+3\lambda)(1+\lambda)$$

$$= -(\lambda^2-4\lambda-1)(1+\lambda) - (1+3\lambda)(1+\lambda)$$

$$= (1+\lambda)(-\lambda^2+4\lambda+1-1-3\lambda) = (1+\lambda)(\lambda-\lambda^2)$$

$$= (1+\lambda)\lambda(1-\lambda)$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Algebraisk mult. $= 1$, vilket innebär att vi kan hitta en egenbas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$: $A\vec{v}_1 = -\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \vec{0}$, $A\vec{v}_3 = \vec{v}_3$.

$S = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$ ger $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$, sökt diagonalmatris.

(b) $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$, dvs $A^{2011} = \overbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})\cdots(SDS^{-1})}^{2011 \text{ stycken}}$

$$= SD^{2011}S^{-1} = S\begin{bmatrix} (-1)^{2011} & 0 & 0 \\ 0 & 0^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2011} \end{bmatrix}S^{-1} = S\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}S^{-1}$$

$$= SDS^{-1} = A, \quad \text{dvs} \quad A^{2011} = A.$$