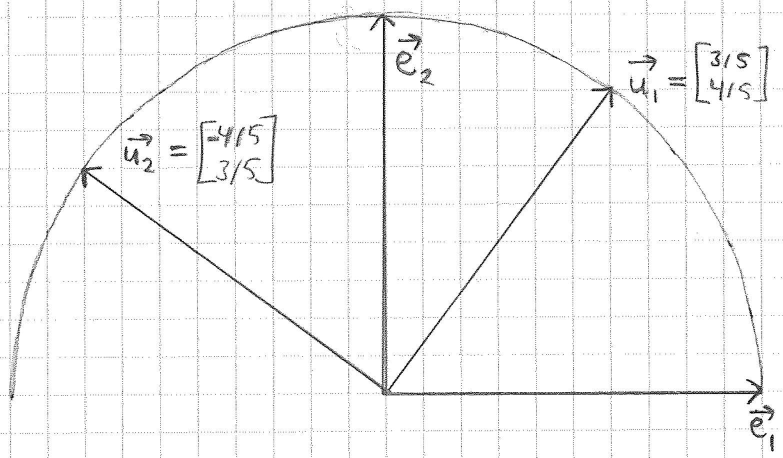
Avsnitt 8.1: Symmetriska matriser

Kom ihåg: en <u>ortonormal bas</u> för $\mathbb{R}^n$ är en bas $\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n\}$ sådan att $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ är parvis ortogonala enhetsvektorer.

Exempel. $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$ utgör en ortonormal bas för $\mathbb{R}^2$, ty $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1$, $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$



En <u>egenbas</u> för en matris A är en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A (A $n \times n$-matris).
Om $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ är basen, så är alltså

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ är de <u>egenvärden</u> som hör till <u>egenvektorerna</u> $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

<u>Fråga</u> När har en matris A en <u>ortonormal</u> egenbas?

<u>Svar</u>: Precis då A är symmetrisk, dvs $A = A^T$

Exempel. Bestäm k så att $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 2k \end{bmatrix}$ har en ortonormal egenbas.

Lösning. <u>Egenvärden</u> till A:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ k & 2k-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2k-\lambda) - 2k = [\text{räkna på}] = \lambda(\lambda - (1+2k))$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1+2k$ och $\lambda_2 = 0$.

<u>Egenvektorer</u> $\lambda_1 = 1+2k$ ger ekvationen

$$A\vec{x} = (1+2k)\vec{x} \iff (A - (1+2k)I_2)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1-(1+2k) & 2 \\ k & 2k-(1+2k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -2k & 2 \\ k & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff [\text{räkna}] \iff \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}}$$

$\lambda_2 = 0$ ger ekvationen $A\vec{x} = 0\vec{x} \iff A\vec{x} = \vec{0}$

$$\iff [\text{räkna}] \iff \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

En ortonormal bas existerar precis då $\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonala, dvs $1 \cdot (-2) + k \cdot 1 = 0 \iff k = 2$

Detta k-värde ger två ortogonala egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Normering ger en ortonormal egenbas: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Observera att $k=2$ ger $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, en <u>symmetrisk</u> matris

$$(A = A^T)$$

19-3

Anta att $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ är en ortonormal egenbas för matrisen A. Skriv

$$S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$$

S är en <u>ortogonal</u> matris, och $S^{-1} = S^T$.

[Exempel. $S = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, där $a^2+b^2=1$. Då är S ortogonal,

och $S^T S = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$]

Enligt tidigare teori (föreläsning 18) är $D = S^{-1}AS$ en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen.

Lös ut A: $D = S^{-1}AS \Leftrightarrow SD = AS \Leftrightarrow SDS^{-1} = A$, dvs

$$A = SDS^T \qquad (\text{ty } S^{-1} = S^T)$$

Titta nu på transponaten (och minns räkneregeln $(PQR)^T = R^T Q^T P^T$):

$$A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T$$

$$= SD^T S^T.$$

Men $D^T = D$, ty D är en diagonalmatris, så

$$A^T = SDS^T = A,$$

dvs $A^T = A \Leftrightarrow$ $\boxed{A \text{ är symmetrisk}}$

19 – 4

Vi visade just att <u>enbart</u> symmetriska matriser kan ha en ortonormal egenbas.

<u>Spektralsatsen</u> säger att <u>alla</u> symmetriska matriser har en ortonormal egenbas.

Vi såg att $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 2k \end{bmatrix}$ har en ortonormal egenbas precis då $k=2$. Förklaring:

* Bara $k=2$ ger en symmetrisk matris.
* Spektralsatsen ger att det finns en ortonormal egenbas för detta k.

A är <u>ortogonalt diagonaliserbar</u> om A är diagonaliserbar med en ortogonal matris S, dvs

$$D = S^{-1}AS = S^{T}AS$$

är en diagonalmatris.

Ekvivalent: A har en ortonormal egenbas (kolonnerna i matrisen S).

Alltså är A ortogonalt diagonaliserbar precis då A är symmetrisk

19-5

Viktig egenskap hos symmetriska matriser (nödvändig för spektralsatsens bevis):

☆ Egenvektorer hörande till <u>olika</u> egenvärden är ortogonala. (*)

<u>Exempel</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Vi såg på föreläsning 18 att

A har egenvärdena 5 och -4. Egenrummet E_5 (hörande till egenvärdet 5) spänns upp av $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Egenrummet E_{-4} spänns upp av $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser att

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1\cdot(-2) + 0\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0\cdot(-2) + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Ortogonala!

Bevis för påståendet (*): Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara egenvektorer sådana att $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ och $A\vec{w} = \mu\vec{w}$, där $\lambda \neq \mu$.
Vi får att

samma!

$$\begin{cases} \vec{v}^T A \vec{w} = \vec{v}^T(A\vec{w}) = \vec{v}^T(\mu\vec{w}) = \mu(\vec{v}\cdot\vec{w}) \\ \vec{v}^T A \vec{w} = (\vec{v}^T A)\vec{w} = (A^T\vec{v})^T\vec{w} \underset{A = A^T}{=} (A\vec{v})^T\vec{w} = (\lambda\vec{v})^T\vec{w} = \lambda(\vec{v}\cdot\vec{w}) \end{cases}$$

Alltså är $\mu(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \lambda(\vec{v}\cdot\vec{w}) \Leftrightarrow (\mu-\lambda)(\vec{v}\cdot\vec{w}) = 0$.

Eftersom $\mu \neq \lambda$, är $\mu - \lambda \neq 0$, så vi får $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = 0}$

<u>Slutsats</u> Om vi har en ortonormal bas för varje egenrum och slår ihop dessa baser till en egenbas för A, så kommer denna egenbas att vara ortonormal (förutsatt att $A = A^T$)

<u>Exempel</u> Vi såg nyss att $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ har en egenbas bestående av

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ är en bas för egenrummet E_5 (egenvärde 5)

$\{\vec{v}_3\}$ är en bas för egenrummet E_{-4} (egenvärde -4)

$\vec{v}_3$ är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$.

$\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är <u>inte</u> ortogonala. Vi ortogonaliserar med Gram-Schmidt:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 1 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Normering ger $\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{w}_1|} \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{16+25+4}} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

och $\vec{u}_3 = \frac{1}{|\vec{v}_3|} \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ortonormal egenbas för A: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

19 - 7

Men tänk om vi inte hittar tillräckligt många egenvektorer?

* Något egenvärde till A är kanske icke-reellt?
* Geometrisk mult. < algebraisk mult. för något egenvärde?

För symmetriska matriser kan dessa saker <u>inte</u> inträffa.

* Alla egenvärden är reella (Theorem 8.1.3)
* Geometrisk mult. = algebraisk mult. (följer av beviset på sid 371-372)

Vi kan alltså <u>alltid</u> hitta en ortonormal egenbas för A om A är symmetrisk.

19-8

Procedur för att hitta en ortogonal diagonalisering av en symmetrisk matris, säg $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Steg (1) Egenvärden Beräkna $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

Räkning ger $f_A(\lambda) = (3-\lambda)^3(-4-\lambda)$, så egenvärdena är $3, 3, 3, -4$

Steg (2a) Baser för egenrummen.

$\lambda = 3$ ger $A - 3I_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ parallella rader

Räkning ger att E_3 består av vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Bas} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda = -4$ ger $A + 4I_4 = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Räkning ger att E_{-4} har basen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Steg (2b) Nästa sida!

$\boxed{\text{Alla uträkningar lämnas som övning!}}$

Steg (2b) Använd Gram-Schmidt för att hitta ortonormala baser för egenrummen.

$\boxed{E_3}$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Gram-Schmidts metod ger de ortonormala vektorerna

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{E_{-4}}$ $\quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Normering ger $\vec{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Steg (3) Slå ihop till en egenbas: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Denna bas är ortonormal.

Steg (4) Sätt $S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{bmatrix}$

Då är $\quad S^T A S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = D$

(Kontrollera gärna att $SD = AS$)

$\boxed{\text{Alla uträkningar lämnas som övning!}}$