18-1

Avsnitt 7.4 Diagonalisering

Kom ihåg: en diagonalmatris har inga nollskilda element utanför diagonalen:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \dots$$

Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med en diagonalmatris D i en given bas B, dvs

$$[T(\vec{y})]_B = D[\vec{y}]_B$$

Då är T enkel att studera i den givna basen B.

Exempel. Låt T ha matrisen $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ i standardbasen.

Låt $B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Då är

$$T(\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 \\ 8 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = 8\vec{v}_1$$

$$T(\vec{v}_2) = A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4\vec{v}_2$$

Om $\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$, dvs $[\vec{y}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, så får vi att

$$T(\vec{y}) = A(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2) = x_1 A\vec{v}_1 + x_2 A\vec{v}_2 = 8x_1\vec{v}_1 - 4x_2\vec{v}_2,$$

dvs $[T(\vec{y})]_B = \begin{bmatrix} 8x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, så

$$[T(\vec{y})]_B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}[\vec{y}]_B.$$

Observation: B är en egenbas för matrisen A.

Diagonalelementen 8 och -4 i matrisen $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ är A:s egenvärden

18-2

Exempel. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vi såg tidigare (17-5, 17-7)
att A har en egenbas bestående av

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har nämligen att $A\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v}_1$

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}_2$$

$$A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\vec{v}_3$$

Om $\vec{y}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, så

gäller att $\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$

$$\Rightarrow A\vec{y} = A(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = x_1A(\vec{v}_1) + x_2A(\vec{v}_2) + x_3A(\vec{v}_3)$$

$$= x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + 4x_3\vec{v}_3,$$

så $A\vec{y}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen med matris A
i standardbasen: $T(\vec{y}) = A\vec{y}$.

Då har T matrisen $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$:

$$[T(\vec{y})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$$

Observation: Diagonalelementen 1, 1, 4 i D är A:s <u>egenvärden</u>.

18-3

Kom ihåg: att avbildningen $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har matrisen A i standardbasen och matrisen D i basen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ betyder att

$$T(\vec{y}) = A\vec{y} \quad \text{och} \quad [T(\vec{y})]_{\mathcal{B}} = D[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$$

Med $S = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ har vi att

$$\vec{y} = S[\vec{y}]_{\mathcal{B}} \iff [\vec{y}]_{\mathcal{B}} = S^{-1}\vec{y}.$$

Alltså är

$$\overbrace{[T(\vec{y})]_{\mathcal{B}}}^{D[\vec{y}]_{\mathcal{B}}} = [A\vec{y}]_{\mathcal{B}} = S^{-1}A\vec{y} = S^{-1}AS[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$$

dvs

$$D = S^{-1}AS.$$

Om $\mathcal{B}$ är en egenbas för A, blir D en diagonalmatris, och elementen på diagonalen är egenvärdena för egenvektorerna i $\mathcal{B}$.

Exempel. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är en egenbas för $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ med egenvärden 8 och -4.

Med $S = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ får vi att $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = D$

Kontroll: $D = S^{-1}AS \iff SD = AS$, och

$$AS = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 & 4 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

samma!

$$SD = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 & 4 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

18-4

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris S så att matrisen

$$D = S^{-1}AS$$

är en diagonalmatris.

Kolonnerna i S utgör i så fall en egenbas för A, och diagonalelementen i D är motsvarande egenvärden.

Vi har nämligen att $D = S^{-1}AS \Leftrightarrow SD = AS$.

3×3-fallet med $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ och $S = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$ ger

$$SD = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \lambda_3\vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$\| \quad \| \quad \|$$

$$AS = A\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & A\vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

dvs $\quad A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \quad A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \quad A\vec{v}_3 = \lambda_3\vec{v}_3$

18-5

Procedur för diagonalisering av matris A:

(1) Bestäm alla egenvärden till A.

(2) Bestäm en bas till varje egenrum.

(3) Slå ihop alla baser till en egenbas för A.

(4) Låt $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara egenbasen.
Skriv $S = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$. Då är $D = S^{-1}AS$
den sökta diagonalmatrisen, och

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

där $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$, $\dots$, $A\vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n$

Vi misslyckas om något värde är icke-reellt (upptäcks i steg (1))
eller om geometrisk mult. < algebraisk mult. för något
egenvärde (upptäcks i steg (2))

18-6 **Exempel**

Diagonalisera, om möjligt, matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(1) Egenvärden:

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{-2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 10-2\lambda \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 10 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = +(5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 10 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\big((1-\lambda)(-\lambda)-20\big) = (5-\lambda)\underbrace{\left(-20-\lambda+\lambda^2\right)}_{(5-\lambda)(-4-\lambda)}$$

$$= (5-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) = (5-\lambda)^2(-4-\lambda)$$

Egenvärden (med multiplicitet): $5, 5, -4$

(2) Baser för egenrummen:

$\lambda = 5$: $(A - 5I_3)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 1-5 & -4 & 2 \\ -4 & 1-5 & 2 \\ 2 & 2 & 4-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{bmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

parallella rader

$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 2s+2t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Bas: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = -4$: $(A + 4I_3)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -9 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\iff \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Bas: $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(3) Nästa sida!

18-7 (fortsättning)

(3) Slå ihop till en egenbas, om det går.

Ja, det går, ty vi har hittat tre vektorer:

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\vec{v}_1 = 5\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = 5\vec{v}_2$, $A\vec{v}_3 = -4\vec{v}_3$.

(4) Sätt $S = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Då är $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ (egenvärden på diagonalen)

Kontroll:

$$SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \\ 10 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AS = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \\ 10 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

18 - 8

Tillämpning: matrispotenser. Notera att

$$D = S^{-1}AS \iff SD = AS \iff SDS^{-1} = A$$

Vi ser att $\underset{\overset{\uparrow}{AA}}{A^2} = SD\underbrace{S^{-1}S}_{I_n}DS^{-1} = SDDS^{-1} = \underline{SD^2S^{-1}}$,

$$A^3 = A^2A = SD^2S^{-1}SDS^{-1} = SD^2DS^{-1} = SD^3S^{-1}$$

$$A^4 = A^3A = [\text{på samma sätt}] = SD^4S^{-1}$$

Allmänt: $A^k = SD^kS^{-1}$

Exempel. Låt $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Beräkna A^k för $k \geq 1$.

Övning: visa att $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ är en egenbas för A med egenvärden 2 och 1.

Med $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ får vi därmed att

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff A = S\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}S^{-1}$$

Alltså är $A^k = S\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k S^{-1} = S\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}S^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\cdot 2^k & -3\cdot 2^k \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 2^k - 3 & -6\cdot 2^k + 6 \\ 2\cdot 2^k - 2 & -3\cdot 2^k + 4 \end{bmatrix} \longleftarrow \boxed{\text{ok svar}}$$

$$= \underbrace{2^k\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{svar, dvs lika med } \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^k}$$