17 - 1

Avsnitt 7.2-7.3: Egenvärden och egenvektorer

Kom ihåg: $\vec{x}$ är en <u>egenvektor</u> till A om $\vec{x}$ är en nollskild lösning till ekvationen $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för någon skalär λ.

* A är en $n \times n$-matris, $\vec{x}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$

Talet λ är <u>egenvärdet</u> hörande till egenvektorn $\vec{x}$.

Senast såg vi att ekvationen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ har nollskilda lösningar $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ precis då

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$$

inte är inverterbar, dvs

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

<u>Exempel</u> (från 16-7): $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Då är λ ett egenvärde precis då

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 11 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (7-\lambda)(-3-\lambda) - 11 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0 \iff (\lambda-2)^2 - 36 = 0 \iff \lambda = 2 \pm 6$$

A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 8$ och $\lambda_2 = -4$.

<u>Exempel</u> (från 16-6): $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då får vi ekvationen

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-\lambda)^2 + 1 = 0 \iff \lambda^2 + 1 = 0$$

Denna ekvation har inga reella lösningar, så A har inga reella egenvärden (bara komplexa egenvärden: $\lambda = \pm i$)

16 - 8

17 - 2 Allmän $n \times n$-matris A: vill hitta alla λ så att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för någon nollskild $\vec{x}$. Vi kan skriva

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A\vec{x} = \lambda(I_n\vec{x}) \iff A\vec{x} - \lambda I_n\vec{x} = \vec{0}$$

$$\iff (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

Denna ekvation har en nollskild lösning precis då

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{ger} \quad A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Vi skriver $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Detta är det <u>karakteristiska polynomet</u> till A, ett polynom i λ av grad n (sid 311).

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Då är
$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(-1)}{}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to (1-\lambda) \\ \to (1-\lambda) \end{matrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2\big((2-\lambda) + 1 + 1\big) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4$

16-9

17-3 I förra exemplet förekom faktorn $1-\lambda$ två gånger i det kar. polynomet $f_A(\lambda)$. Vi säger att den <u>algebraiska multipliciteten</u> för egenvärdet 1 är 2.

Allmänt: om faktorn $(\lambda_0-\lambda)$ förekommer k gånger i $f_A(\lambda)$, så har λ_0 <u>alg. mult.</u> k.

Exempel. $f_A(\lambda) = (49+\lambda^2)(27-\lambda)^4(315-\lambda)^3(-\frac{37}{2}-\lambda)$

Då har egenvärdet 27 alg. mult. 4,
egenvärdet 315 alg. mult. 3,
egenvärdet $-\frac{37}{2}$ alg. mult. 1 $\left((-\frac{37}{2}-\lambda)=(-\frac{37}{2}-\lambda)^1\right)$

Faktorn $49+\lambda^2$ ger inga egenvärden, ty $49+\lambda^2=0$ saknar reella lösningar. Egenvärdena är alltså
$27, 27, 27, 27, 315, 315, 315, -\frac{37}{2}$
(I exemplet är A en fiktiv 10×10-matris.)

Faktum: antal egenvärden (räknade med alg. mult.) är högst n om A är en $n\times n$-matris.

17 – 4

Hittills har vi bara beräknat egenvärden. Nu ska vi hitta egenvektorerna också.

<u>Exempel</u>. $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 8$ och $\lambda_2 = -4$ (se 17 – 1). Egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda_1 = 8$ är alla nollskilda lösningar $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ hörande till ekvationen

$$A\vec{x} = 8\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = 8I_2\vec{x} \Leftrightarrow (A - 8I_2)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7-8 & 11 \\ 1 & -3-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 - 11x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11t \\ x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna hörande till $\lambda_1 = 8$ är alltså alla vektorer på formen $t\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$ för $t \neq 0$ (nollvektorn är ingen egenvektor)

För $\lambda_2 = -4$ får vi ekvationen

Rättelser

$$(A - (-4)I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7-(-4) & 11 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

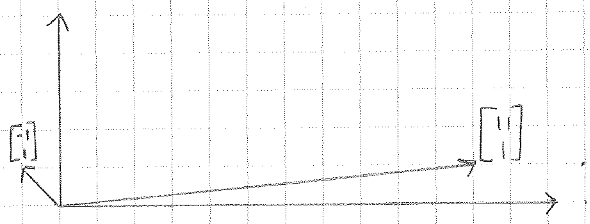
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna blir alltså $t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ för $t \neq 0$

Kontroll: $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 \\ 8 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



<u>Exempel</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4$ (se 17 – 2)

Kom ihåg att $f_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$.

$\lambda_1 = 1$ ger ekvationen

$$(A - I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna med egenvärde 1 är alltså alla nollskilda vektorer i delrummet som spänns upp av $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Detta delrum är <u>egenrummet</u> hörande till egenvärdet 1.

Notera att dimensionen är 2 = alg. mult. för egenvärdet 1

$\lambda_2 = 4$ ger ekvationen

$$(A - 4I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

kan utelämnas

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Vi får } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenrummet hörande till egenvärdet 4 är alltså linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

17-6

Egenrummet hörande till egenvärdet λ är alltså delrummet till $\mathbb{R}^n$ bestående av alla lösningar till ekvationen

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

Egenrummet är alltså $\ker(A-\lambda I_n)$, vilket boken betecknar med E_λ:

$$E_\lambda = \ker(A-\lambda I_n)$$

Dimensionen för E_λ är den geometriska multipliciteten för egenvärdet.

Faktum (Theorem 7.3.7): geometrisk mult. $\leq$ algebraisk mult.

I exemplen hade vi likhet. Vi kan även ha olikhet:

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Då är

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - (-1)\cdot 1 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$= 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (2-\lambda)^2$$

A har alltså ett enda egenvärde $\lambda = 2$ med alg. mult. 2.

Dock ser vi att

$$(A - 2I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenrummet är alltså en linje, så den geom. mult. är 1, dvs mindre än 2 = alg. mult.

17-7

En bas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$ är en <u>egenbas</u> för matrisen A om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ är egenvektorer till A.

Exempel $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en

egenbas för $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (se 17-5)

$$\left[\text{Bas, ty } \left| \vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3 \right| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1-2) = 3 \neq 0 \right]$$

utveckla

Faktum: om vi har en bas för varje egenrum till A, så finns det inga linjära beroenden mellan baserna.

Exemplet: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en bas för egenrummet för $\lambda_1 = 1$,

och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en bas för egenrummet för $\lambda_2 = 4$.

Det finns inga linjära beroenden mellan $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

När finns det en egenbas?

Svar: När (1) alla egenvärden till A är reella
och (2) geom. mult = alg. geom. för varje egenvärde.

Precis då får vi ihop tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer, nämligen n, där A är en $n \times n$-matris

17 - 8

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en egenbas för A (om en sådan finns)

Lösning. Egenvärdena ges av ekvationen $\det(A-\lambda I_4)=0$.

Nu är

$$\det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

stryk

Teckenschema:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)\big(-\lambda(1-\lambda)-2\big)$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)\underbrace{(-\lambda+\lambda^2-2)}_{(2-\lambda)(-1-\lambda)} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$$

Rättelse

Vi hittar alltså egenvärdena $\lambda_1 = 2$ och $\underline{\lambda_2} = -1$.

Egenbaser beräknas:

vi skippar detaljer

$$\lambda_1 = 2: \begin{bmatrix} 0-2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s-t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är en egenbas för egenvärdet 2.

$$\lambda_2 = -1: \begin{bmatrix} 0+1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är en egenbas för egenvärdet -1.

Slutsats: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är en egenbas för A.