Avsnitt 6.2–6.3 Mer om determinanter

Kom ihåg följande formel för 3×3-matriser:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} & \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Detta är <u>Laplaceutvecklingen</u> längs den första kolumnen.

Mer allmänt för en $n \times n$-matris: Låt A_{ij} vara den matris som erhålls då vi stryker rad i och kolumn j.
Låt a_{ij} vara elementet i rad i och kolumn j.
Då är

$$\det A = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{31}\det(A_{31}) -$$
$$- a_{41}\det(A_{41}) + \ldots \quad (\text{omväxlande } + \text{ och } -)$$

För $n=3$ återfår vi formeln $(*)$ (med $a_{11}=a_1,\ a_{21}=a_2,\ a_{31}=a_3$).

<u>Exempel</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = 2\cdot(-26) - (-1)$$
$$= \boxed{-51}$$

Utveckling längs andra kolumner eller rader (<u>se sid 268–271</u>):
Tecken enligt följande mönster:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

(schackbrädesmönster)

Exempel: rad 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & + & - & + & - \\ 2 & - & + & - & + \\ 3 & + & - & + & - \\ 4 & - & + & - & + \end{array}$$

$$\det A = -a_{21}\det A_{21} + a_{22}\det A_{22} - a_{23}\det A_{23} + \ldots$$

16-2

Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med matris A:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Vi skriver $\det T = \det A$.

Exempel T är en ortogonal avbildning, dvs A är ortogonal:

$$A^T A = I_n \quad , \text{dvs} \quad \det(A^T A) = 1$$

Men $\det(A^T A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produktregeln}}}{=} \det(A^T)\det(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \det A^T = \det A}}{=} (\det A)^2$

Alltså är $(\det(A))^2 = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$

Om $\det A = 1$ (dvs $\det T = 1$), så är T en <u>rotation</u>.

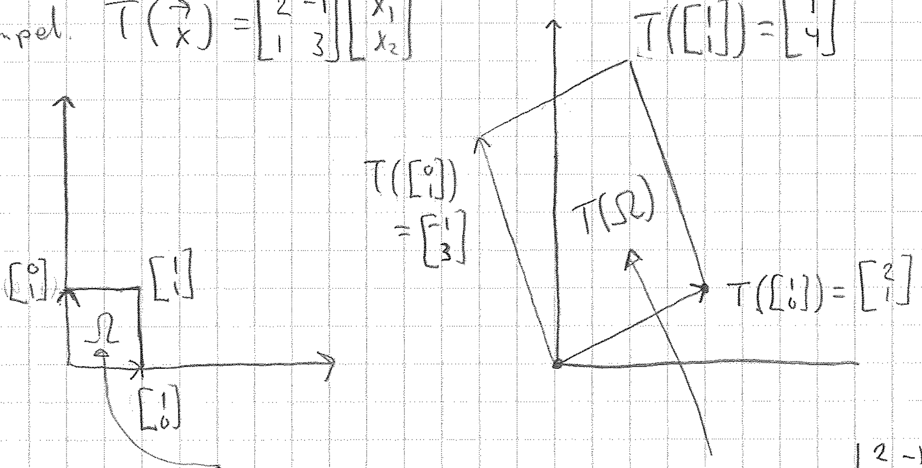
(Förutsatt att T är ortogonal) $\leftarrow$ $\boxed{\text{TILLÄGG}}$

Exempel $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ är en ortogonal matris, och $\det(A) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, så A är en rotationsmatris.

16 - 3

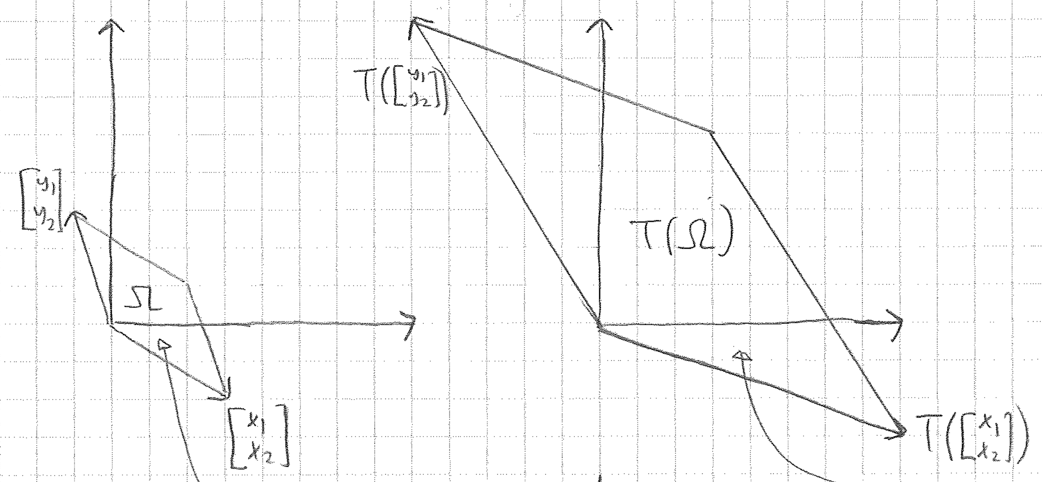
Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning, och låt Ω vara ett område i $\mathbb{R}^2$. Hur förhåller sig arean av Ω till arean av $T(\Omega)$?

Exempel. $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



area av $\Omega = 1$

$\pm$ area av $T(\Omega) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$



$\pm$ area av $\Omega = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$

$\pm$ area av $T(\Omega)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 7 \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

Allmänt gäller för parallellogram Ω att

area av $T(\Omega) = |\det T| \cdot (\text{area av } \Omega)$ (sid 281-283)

16 - 4

<u>Cramers regel.</u> Titta först på en inverterbar 2x2-matris $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har lösningen $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, dvs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} sb_1 - qb_2 \\ -rb_1 + pb_2 \end{bmatrix},$$

dvs
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\det A}(sb_1 - qb_2) = \dfrac{1}{\det A} \begin{vmatrix} b_1 & q \\ b_2 & s \end{vmatrix} \\ x_2 = \dfrac{1}{\det A}(-b_1 r + b_2 p) = \dfrac{1}{\det A} \begin{vmatrix} p & b_1 \\ r & b_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Skriver vi $A = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2]$, får vi
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\det A} |\vec{b}\ \vec{u}_2| \\ x_2 = \dfrac{1}{\det A} |\vec{u}_1\ \vec{b}| \end{cases}$$

3x3-fallet med inverterbar $A = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3]$:

Då har $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{b}$ den unika lösningen

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\det A} |\vec{b}\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3| \\ x_2 = \dfrac{1}{\det A} |\vec{u}_1\ \vec{b}\ \vec{u}_3| \\ x_3 = \dfrac{1}{\det A} |\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{b}| \end{cases}$$

Allmänt n: analogt (och praktiskt oanvändbart)

Läs mer om regeln: 283-289

Varför? Jo, om $\vec{b} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$, så är exempelvis

$$|\vec{b}\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3| = |(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3)\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3|$$
$$= [\text{kolumnoperationer}] = |x_1\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3|$$
$$= x_1 |\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3| = x_1 \det A$$

16-5

Avsnitt 7.1-7.2 Egenvärden och egenvektorer.

Inledande exempel.

$A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$ är matrisen för spegling i en viss linje. Ange linjens ekvation.

Lösning. Om T betecknar speglingen, och $\vec{x}$ är en vektor parallell med speglingslinjen, så är

$$T(\vec{x}) = \vec{x} \iff A\vec{x} = \vec{x}$$

$$\iff \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{5}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_2 = x_1 \\ \frac{12}{13}x_2 - \frac{5}{13}x_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{8}{13}x_1 + \frac{12}{13}x_2 = 0 \\ \frac{12}{13}x_2 - \frac{18}{13}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8x_1 + 12x_2 = 0 \\ 12x_1 - 18x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \iff 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Linjens ekvation är alltså $2x_1 - 3x_2 = 0$.

Vi ser att parameterformen blir $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, och

$T\left(\begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}$.

16 – 6

I ovanstående exempel löste vi ekvationen $A\vec{x} = \vec{x}$.

Vi hade också kunnat lösa ekvationen $A\vec{x} = -\vec{x}$, vars lösning är speglingslinjens normaler: $\vec{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

En nollskild lösning till ekvationen $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (λ skalär) är en <u>egenvektor</u> till matrisen A.

Om $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ har en nollskild lösning, säger vi att λ är ett <u>egenvärde</u> till A.

Vi räknar <u>inte</u> nollvektorn som en egenvektor, utan kräver att egenvektorer är nollskilda.

TILLÄGG

$\downarrow$

Noll är dock ett tillåtet <u>egenvärde</u>

I exemplet var $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ en egenvektor med egenvärdet 1, ty $A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ var en egenvektor med egenvärdet -1, ty

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Om $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, så ges egenvektorerna av lösningarna till

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = \lambda x_1 & (1) \\ x_1 = \lambda x_2 & (2) \end{cases}$$

Men $x_1 \overset{(2)}{=} \lambda x_2 \overset{(-1)}{=} \lambda(-\lambda x_1) = -\lambda^2 x_1 \Leftrightarrow (1+\lambda^2)x_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$. På samma sätt: $x_2 = 0$.

A har alltså <u>inga</u> egenvektorer.

Obs: A är rotation med $\frac{\pi}{2}$ rad, så $\vec{x}$ och $A\vec{x}$ är alltid ortogonala.

16 - 7

Titta nu på ekvationen $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för en allmän matris A och en allmän skalär λ.

2×2-fallet: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \lambda x_1 \\ cx_1 + dx_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 - \lambda x_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + (d-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denna ekvation har nollskilda lösningar precis då

$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$ <u>inte</u> är inverterbar, dvs

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

Egenvärdena till A är de λ som uppfyller denna ekvation.

<u>Exempel</u> $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Då är λ ett egenvärde precis då

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 11 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (7-\lambda)(-3-\lambda) - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{36} \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 6$$

A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 8$ och $\lambda_2 = -4$

16-8

Allmän $n \times n$-matris A: vill hitta alla λ så att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för någon nollskild $\vec{x}$. Vi kan skriva

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A\vec{x} = \lambda(I_n\vec{x}) \iff A\vec{x} - \lambda I_n\vec{x} = \vec{0}$$

$$\iff (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$$

Denna ekvation har en nollskild lösning precis då

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{ger} \quad A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Vi skriver $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Detta är det <u>karakteristiska polynomet</u> till A, ett polynom i λ av grad n (sid 311).

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Då är $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{-1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \; -1$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to 1-\lambda \\ \to 1-\lambda \end{matrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2\big((2-\lambda) + 1 + 1\big) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4$

16-9

I förra exemplet förekom faktorn $1-\lambda$ två gånger i det kar. polynomet $f_A(\lambda)$. Vi säger att den <u>algebraiska multipliciteten</u> för egenvärdet 1 är 2.

Allmänt: om faktorn $(\lambda_0 - \lambda)$ förekommer k gånger i $f_A(\lambda)$, så har λ_0 <u>alg. mult.</u> k.

Exempel. $f_A(\lambda) = (49+\lambda^2)(27-\lambda)^4(315-\lambda)^3(-\frac{37}{2}-\lambda)$

Då har egenvärdet 27 alg. mult. 4,
egenvärdet 315 alg. mult. 3,
egenvärdet $-\frac{37}{2}$ alg. mult. 1 $\left((-\frac{37}{2}-\lambda) = (-\frac{37}{2}-\lambda)^1 \right)$

Faktorn $49+\lambda^2$ ger inga egenvärden, ty $49+\lambda^2=0$ saknar reella lösningar. Egenvärdena är alltså
$27, 27, 27, 27, 315, 315, 315, -\frac{37}{2}$

(I exemplet är A en fiktiv 10×10-matris.)

Faktum: antal egenvärden (räknade med alg. mult.) är högst n om A är en $n \times n$-matris.