15 – 1

Avsnitt 6.1 – 6.2 Determinanter

Kom ihåg: <u>determinanten</u> av en 2×2-matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

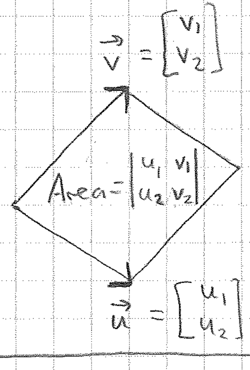
är $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

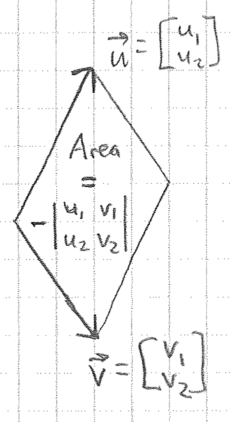
Om $\det A \neq 0$, så är A inverterbar med invers

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Om $\det A = 0$, så är A inte inverterbar.

$\det A$ är $\pm$ arean av parallellogrammen som spänns upp av A:s kolonner.





15-2

Determinanten av en 3×3-matris A med kolonner $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är definierad som trippelprodukten

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{vmatrix} = \det(A)$$

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, så

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 2+8-3 = 7$$

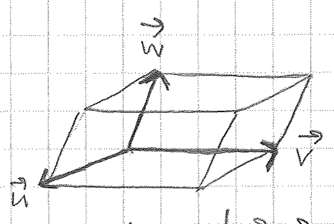
Direkt formel: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2$

$$- a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ är nollskild precis då $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjärt oberoende, dvs då A är inverterbar. Alltså:

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ är inverterbar}$$

$\det A = \pm$ volymen av parallellepipeden som spänns upp av A:s kolonner.



$$\text{Volym} = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{vmatrix}$$

15-3

Determinanten av en allmän $n \times n$-matris är besvärlig att definiera.

Låt oss först titta på en metod att beräkna determinanten.

Vill att $\det(A) \neq 0 \iff A$ är inverterbar.

Om A är triangulär, låter vi

$$\det(A) = \text{produkten av diagonalelementen}$$

Exempel. Vi har att $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$ och $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = aei$

(följer av existerande formler).

För $n=4$ bestämmer vi att $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = aehj$

Matrisen är inverterbar om alla element på diagonalen är nollskilda och inte inverterbar annars.

Exempel. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$ är inverterbar, men $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$ är det inte

(trappstegsformen kan inte bli $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$).

Större n: samma princip.

Metod för allmän matris: radoperationer

15-4

Elementära radoperationer : 2x2-fallet.

Addition av k·(rad i) till rad j påverkar inte determinanten:

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = (a+kc)d - (b+kd)c = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+kd) = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Byte av rad byter tecken på determinanten:

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb-da = -(ad-bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Multiplikation med konstant k till rad ger samma effekt på determinanten:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad-kbc = k(ad-bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = a(kd)-b(kc) = k(ad-bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Observera att man får tänka "bakvänt":

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{k} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \left(\underline{\text{inte}}: \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} \neq \tfrac{1}{k}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)$$

Bättre skriva $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow k \;= k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Exempel. $\begin{vmatrix} 14 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \rightarrow 7 \;= 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \leftarrow -2 \;= 7\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$

$$= -7\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -7\cdot 1\cdot 11 = -77.$$

15-5

Samma princip gäller för 3×3-fallet (kontrollera!)

Exempel.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{c} 2 \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \to 3 \end{array} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ -5 \\ \end{array} = -3\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1\cdot 2\cdot(-2) = \boxed{12}$$

[Dubbelkoll:
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 4 + 4\cdot 5\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)\cdot 2$$
$$- 1\cdot 5\cdot 2 - 4\cdot(-2)\cdot 4 - (-1)\cdot 2\cdot(-1)$$
$$= 8 - 20 + 4 - 10 + 32 - 2 = \boxed{12}$$
]

Visar sig att samma princip ger en vettig definition för allmänna $n\times n$-fallet (och inverterbarhet bevaras under radoperationer)

Exempel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}\begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ \to 2 \\ \\ \end{array} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot 5\cdot 8\cdot 10 = -800.$$

Här bör man tänka kritiskt. Blir svaret alltid detsamma oavsett valet av radoperationer?

(Jag påstår att det är så, men hur vet ni att jag inte ljuger?)

Observera: $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = +abc$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -abc$$

I en 3×3-matris med exakt ett nollskilt element i varje rad och kolumn beror determinantens tecken på

<u>antalet radbyten för att få en diagonalmatris</u>

* $+$ om antalet radbyten är jämnt
* $-$ om antalet radbyten är udda.

Vi har att

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & b_2 & \\ & & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & b_1 & \\ & & c_2 \\ a_3 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & c_1 \\ a_2 & & \\ & b_3 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & & c_2 \\ & b_3 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & b_1 & \\ a_2 & & \\ & & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & c_1 \\ & b_2 & \\ a_3 & & \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1}_{\text{jämnt antal byten}} \underbrace{- a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}_{\text{udda antal byten.}}$$

Allmän definition av determinant av $n\times n$-matris:

(1) Lista alla sätt att välja exakt ett nollskilt element från varje rad och kolumn

(2) För varje uppställning i (1), bilda produkten av de nollskilda elementen. Multiplicera med -1 om ett udda antal radbyten ger diagonalmatris.

(3) Summera alla produkter.

Definitionen är konsistent med det vi sagt om radoperationer (se sid 263-266)

15-7

Exempel. Beräkna $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 10 \\ 1 & 11 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -7 \end{vmatrix}$ utan radoperationer.

Lösning. Vi hittar alla sätt att välja ett nollskilt element från varje rad och kolumn.

Måste välja $\boxed{3}$ från kolumn 3: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & \cdot & 10 \\ \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ 5 & 9 & \cdot & 0 \\ 0 & 8 & \cdot & -7 \end{vmatrix}$

Kan välja antingen $\boxed{4}$ eller $\boxed{5}$ från kolumn 1:

$\boxed{4}$: $\begin{vmatrix} \boxed{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ \cdot & 9 & \cdot & 0 \\ \cdot & 8 & \cdot & -7 \end{vmatrix}$ En möjlighet: $\begin{vmatrix} \boxed{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ \cdot & \boxed{9} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{-7} \end{vmatrix}$

$\boxed{5}$: $\begin{vmatrix} \cdot & 2 & \cdot & 10 \\ \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ \boxed{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & \cdot & -7 \end{vmatrix}$ Två möjligheter: $\begin{vmatrix} \cdot & \boxed{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ \boxed{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{-7} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{10} \\ \cdot & \cdot & \boxed{3} & \cdot \\ \boxed{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{8} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$

Determinanten blir därför

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \end{vmatrix}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{10} \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\left(-(4\cdot 3\cdot 9\cdot(-7))\right) + \left(+2\cdot 3\cdot 5\cdot(-7)\right) + \left(-(10\cdot 3\cdot 5\cdot 8)\right) = +756 - 210 - 1200 = -654$$

(udda antal radbyten krävs) (jämnt antal byten) (udda antal byten)

$$\begin{vmatrix} & & & 10 \\ & & 3 & \\ 5 & & & \\ & 8 & & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & & & \\ & & 3 & \\ & & & 10 \\ & 8 & & \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 5 & & & \\ & 8 & & \\ & & & 10 \\ & & 3 & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & & & \\ & 8 & & \\ & & 3 & \\ & & & 10 \end{vmatrix} = -5\cdot 8\cdot 3\cdot 10$$

Mer information: sid 253 – 256

15 - 8

Determinanten bevaras under transponering:

$$\boxed{\det A^T = \det A} \quad \text{(se sid 261-262)}$$

3×3 - fallet: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

Konsekvens: vi kan använda kolumnoperationer för att beräkna determinanten.

Determinanten av en produkt = produkten av determinanterna:

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)} \quad \text{(se sid 267)}$$

Beviset är inte alldeles enkelt. Illustrerande exempel i 2×2-fallet:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\qquad AB = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix}$

Beräkna det A och det AB med samma radoperationer:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \sim (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \sim (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det AB = \begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ -2c & -2d \end{vmatrix} \sim (-2)\begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{vmatrix} \sim (-2)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-2)\det B$$

Vi ser alltså att de radoperationer, som gör om A till I_2, gör om AB till B (ty $A \mapsto A^{-1}A = I_2$ och $AB \mapsto A^{-1}(AB) = B$)

Determinanten av inversen = inversen av determinanten:

Om A är inverterbar, så är $\boxed{\det(A^{-1}) = 1/\det(A)}$

Bevis: $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$

$$\Leftrightarrow \det(A^{-1}) = 1/\det A$$