14 - (1)

## Avsnitt 5.1 (forts): ortogonala projektioner.

Kom ihåg: vektorer $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ är <u>ortonormala</u> om de är ortogonala mot varandra och har längd 1.

Om $\vec{y}$ tillhör spannet av $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$, så är

$$\vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k)\vec{u}_k \qquad (*)$$

Exempel. $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

ger $\vec{y} = \left(3 \cdot \frac{3}{5} - (-2)\frac{4}{5}\right)\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} + \left(3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + (-2)\frac{3}{5}\right)\begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} - \frac{18}{5}\begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

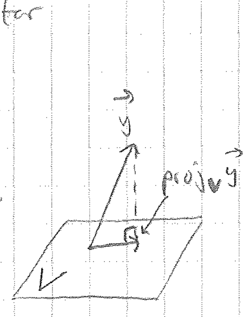
Låt $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ vara ortonormala vektorer i $\mathbb{R}^n$. De utgör en ortonormal bas för det delrum $V$ i $\mathbb{R}^n$ som de spänner upp. Den <u>ortogonala projektionen</u> av en vektor $\vec{y}$ i $\mathbb{R}^n$ på $V$ är

$$\text{proj}_V \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \cdots (\vec{y} \cdot \vec{u}_k)\vec{u}_k.$$

Denna formel liknar $(*)$, men nu är $\vec{y}$ vilken vektor som helst i $\mathbb{R}^n$.

Rättelse

$\text{proj}_V \vec{y}$ är den unika vektorn $\vec{v}$ i $V$ sådan att $\vec{y} - \vec{v}$ är ortogonal mot alla vektorer i $V$




Beviset liknar det för $(*)$ från föreläsning 13 (se sid 190-191).

14-2

Exempel. Låt $V$ vara planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av de ortonormala vektorerna

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

Låt $\vec{y} = \begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$. Då är

$$\text{Proj}_V(\vec{y}) = (\vec{y}\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{y}\cdot\vec{u}_2)\vec{u}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(3\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}(3\cdot 2 + 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1)\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \frac{5}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}47/18\\-7/18\\10/18\end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}47\\-7\\10\end{bmatrix}$$

Vi ser att $\vec{y} - \text{proj}_V\vec{y} = \begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{18}\begin{bmatrix}47\\-7\\10\end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}7\\7\\-28\end{bmatrix} = \frac{7}{18}\begin{bmatrix}1\\1\\-4\end{bmatrix}$

Denna vektor är ortogonal mot $V$.

Se sidan 217 för en metod att beräkna matrisen för den ortogonala projektionen.

14-3

Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ortogonal projektion på delrummet $V$, dvs $T(\vec{x}) = \text{proj}_V(\vec{x})$

Bildrummet: $\text{im}(T) = V$

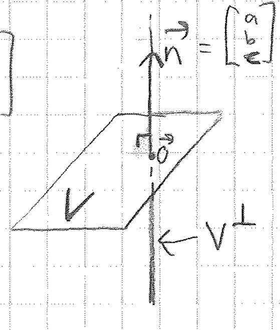
Nollrummet: $\ker(T)$ = alla $\vec{x}$ som är ortogonala mot alla vektorer i $V$

(ty då blir $x \cdot \vec{u}_i = 0$ för alla basvektorer $\vec{u}_i$)

Vi säger att $\ker T$ är det <u>ortogonala komplementet</u> till $V$ och skriver $V^\perp = \ker T$

Exempel: Om $V$ = planet med normal $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, så är

$V^\perp$ = linjen med riktning $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$




Om $V$ = linjen med riktning $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$,

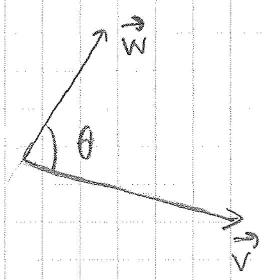
så är $V^\perp$ = planet med normal $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Egenskaper hos $V^\perp$: sid 193-194

14-4

<u>Vinkeln</u> mellan två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^n$ är det $\theta$ mellan $0$ och $\pi$ som uppfyller

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$$



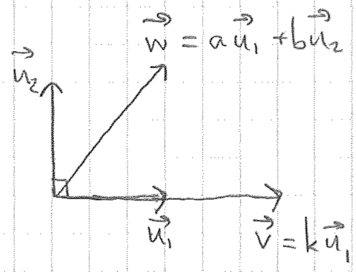

Denna definition kräver att

$$-1 \le \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} \le 1, \quad \text{dvs} \quad \underbrace{|\overbrace{\vec{v}\cdot\vec{w}}^{\text{skalär}}|}_{\text{absolutbelopp}} \le \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{längd}}\cdot\underbrace{|\vec{w}|}_{\text{längd}}$$

Detta gäller <u>alltid</u> (Cauchy-Schwarz' olikhet)

Hur ser vi det? Jo, låt $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vara en ortonormal bas för det plan i $\mathbb{R}^n$ där $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ligger. Välj $\vec{u}_1$ parallell med $\vec{v}$, dvs

$\vec{v} = k\vec{u}_1$ för något $k$.




Vi kan skriva $\vec{w} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$

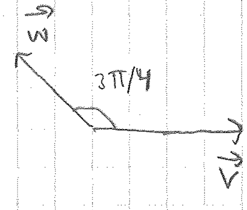
Vi ser att $|\vec{v}\cdot\vec{w}| = |ka| = |k|\cdot|a|$

$$|\vec{v}|\cdot|\vec{w}| = |k|\cdot\sqrt{a^2+b^2} \ge |k|\sqrt{a^2+0^2} = |k||a|,$$

så $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \le |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|$ $\quad \left(|\vec{w}|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w} = a^2\underbrace{(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1)}_{=1} + b^2\underbrace{(\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2)}_{=1} + 2ab\underbrace{(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)}_{=0}\right)$

Exempel. Om $\vec{v} = \begin{bmatrix}-1\\4\\0\\1\end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix}1\\-2\\2\\0\end{bmatrix}$, så

är $\vec{v}\cdot\vec{w} = -9$, $\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{v} = 18 \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\\ \vec{w}\cdot\vec{w} = 9 \Leftrightarrow |\vec{w}| = 3\end{cases}$




dvs $\cos\theta = \dfrac{-9}{3\sqrt{2}\cdot 3} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{\theta = \dfrac{3\pi}{4}}$

14-5

## Avsnitt 5.3 Ortogonala avbildningar och matriser

En linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är ortogonal om $T$ bevarar skalärprodukter:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y})$$

Alternativ beskrivning: $T$ bevarar längder:

$$|\vec{x}| = |T(\vec{x})| \qquad \text{(Bretschers definition)}$$

[ Om $T$ bevarar skalärprodukter, har vi att

$$|T(\vec{x})|^2 = T(\vec{x}) \cdot T(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2,$$

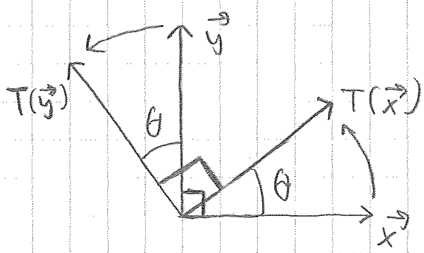
dvs $T$ bevarar längder. Om $T$ bevarar längder, kan man visa att $T$ också bevarar skalärprodukter (tips: jämför $|\vec{x}+\vec{y}|^2$ och $|T(\vec{x}) + T(\vec{y})|^2$). ]

Namnet "ortogonal" beror på att $T$ bevarar räta vinklar:

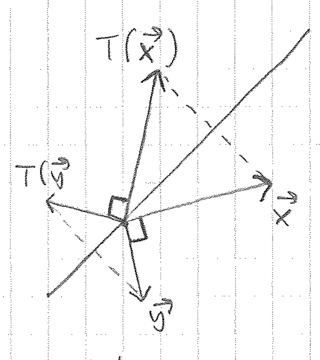
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = 0$$

### Exempel i $\mathbb{R}^2$

Rotation runt origo:




Spegling i linje:




Båda bevarar längder och vinklar.

(14-6)

En $n \times n$-matris $A$ är <u>ortogonal</u> om kolonnerna i $A$ utgör en <u>ortonormal</u> bas till $\mathbb{R}^n$.

Exempel. $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Låt $T$ vara en linjär avbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med matris $A$ i standardbasen, dvs $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

$$T \text{ ortogonal} \iff A \text{ ortogonal}.$$

Fallet $\mathbb{R}^3$: Låt $A = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{u}_3]$, dvs

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \vec{u}_1, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \vec{u}_2, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \vec{u}_3,$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$

Då är $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$

$$T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3$$

och $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) \cdot T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right) = (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3) \cdot (y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + y_3\vec{u}_3)$

$$\xrightarrow{\boxed{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ ortonormal bas}}} \quad = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

Exempel: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad \vec{y} = \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$. Då är

$$A\vec{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix} \quad A\vec{y} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\8\\-1\end{bmatrix},$$

och vi ser att

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \text{och} \quad \underset{T(\vec{x})}{\underset{\uparrow}{(A\vec{x})}} \cdot \underset{T(\vec{y})}{\underset{\uparrow}{(A\vec{y})}} = 0$$

14-7

Om $S$ och $T$ är ortogonala avbildningar, så är även sammansättningarna $S \circ T$ och $T \circ S$ $\left( S \circ T(\vec{x}) = S(T(\vec{x})) \right)$ och inverserna $S^{-1}$ och $T^{-1}$ ortogonala.

Alltså gäller samma sak för matriser:
Om $A$ och $B$ är ortogonala matriser, så är även $AB$, $BA$, $A^{-1}$ och $B^{-1}$ ortogonala.

Transponaten $A^T$ av en matris $A$: byt plats på rader och kolumner.

Exempel. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Om $A$ är ortogonal, så är $A^{-1} = A^T$.

Exempel. $\underbrace{A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{Rotation } +\theta \text{ rad}} \Leftrightarrow A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{Rotation } -\theta \text{ rad.}} = A^T$

I $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} - \vec{u}_1 - \\ - \vec{u}_2 - \\ - \vec{u}_3 - \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} - \vec{u}_1 - \\ - \vec{u}_2 - \\ - \vec{u}_3 - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 \end{bmatrix} \underset{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ ortonormal}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fler egenskaper hos transponaten: sid 216

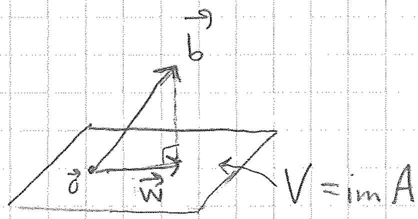
## Avsnitt 5.4. "Minsta kvadratmetoden"

I princip en generalisering av problemet att hitta den punkt på en given linje eller ett givet plan som ligger närmast en given punkt.

Låt $A\vec{x} = \vec{b}$ vara ett <u>inkonsistent</u> system, dvs inget $\vec{x}$ uppfyller ekvationen.

Vi vill hitta $\vec{x}$ så att $A\vec{x}$ är så nära $\vec{b}$ som möjligt: $|\vec{b} - A\vec{x}|$ är minimalt.

Låt $V = \text{im}\,A$ = alla $\vec{y}$ så att $A\vec{x} = \vec{y}$ för något $\vec{x}$.
Då är $\vec{w} = \text{proj}_V(\vec{b})$ den vektor i $V$ som är närmast $\vec{b}$, dvs $|\vec{b} - \vec{w}|$ är minimalt (se sid 222)




Nu gäller att

$\vec{b} - \vec{w}$ är ortogonal mot $V = \text{im}\,A$
$\iff$ $\vec{b} - \vec{w}$ är ortogonal mot kolonnerna i $A$
$\iff$ $A^T(\vec{b} - \vec{w}) = \vec{0}$ $\iff$ $A^T\vec{w} = A^T\vec{b}$

Vi vill alltså hitta $\vec{x}$ så att $\vec{w} = A\vec{x}$ med $\vec{w}$ som ovan, dvs

$$\boxed{A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}}$$

14-9

Exempel. Hitta $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ så att $A\vec{x}$ är så nära $\vec{b}$ som möjligt, där

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning Vi vill hitta $\vec{x}$ så att $\vec{b} - A\vec{x}$ är ortogonal mot kolonnerna i $A$, dvs

$$A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{50-36} \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Följdfråga: vad är avståndet mellan $A\vec{x}$ och $\vec{b}$?

Lösning. $A\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$$\text{så} \quad \vec{b} - A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och $|\vec{b} - A\vec{x}| = \frac{2}{7}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{2}{7}\sqrt{14}$

(Obs: im $A$ = planet $x + 2y + 3z = 0$, som har normal $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$)