12-1

## 3.4: Koordinater (forts.)

Kom ihåg att <u>koordinatvektorn</u> för vektorn

$$\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_m\vec{v}_m = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

i basen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ för delrummet $V$ är vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$.

Vi skriver $\left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, dvs $\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix}\left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}}$

Exempel. $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}\right\}$$

Vektorn med koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ i basen $\mathcal{B}$ är

$$1\cdot\vec{u}_1 + 3\cdot\vec{u}_2 + (-2)\vec{u}_3 = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dvs $\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$ är vektorn uttryckt i <u>standardbasen</u> $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Vi skriver $\left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, där $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$

Repetition: $\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix}\underbrace{\left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}}}$

$\vec{y}$ i standardbasen

vektorerna i basen $\mathcal{B}$

$\vec{y}$ uttryckt i basen $\mathcal{B}$

12-2

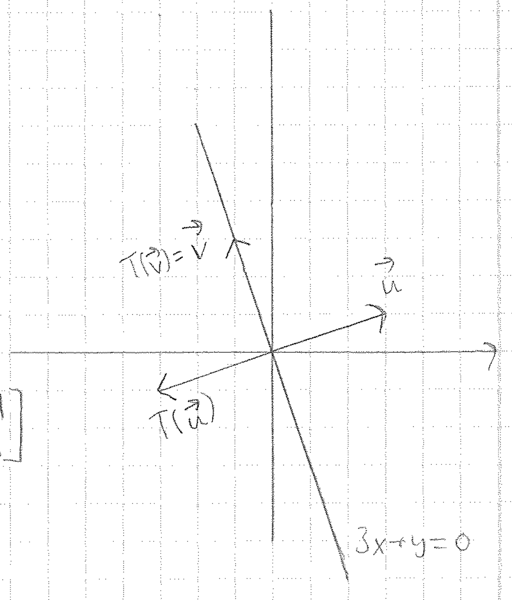
Idag: linjära avbildningar m.a.p. en given bas

Exempel. Låt T vara spegling i linjen $3x+y=0$

Sätt $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ och $\vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$.

* $\vec{u}$ är en normal till linjen, så $T(\vec{u})=-\vec{u}$
* $\vec{v}$ är parallell med linjen, så $T(\vec{v})=\vec{v}$

Sätt $B=\{\vec{u},\vec{v}\}=\left\{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$




Låt $\vec{y}$ vara en vektor med koordinatvektor $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ i basen B:

$$\left[\vec{y}\right]_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{y}=x_1\vec{u}+x_2\vec{v}=x_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{y}=\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Speglingen av $\vec{y}$ i linjen:

$$T(\vec{y})=T(x_1\vec{u}+x_2\vec{v})\underset{\text{linjär}}{=}x_1T(\vec{u})+x_2T(\vec{v})=x_1(-\vec{u})+x_2\vec{v}$$

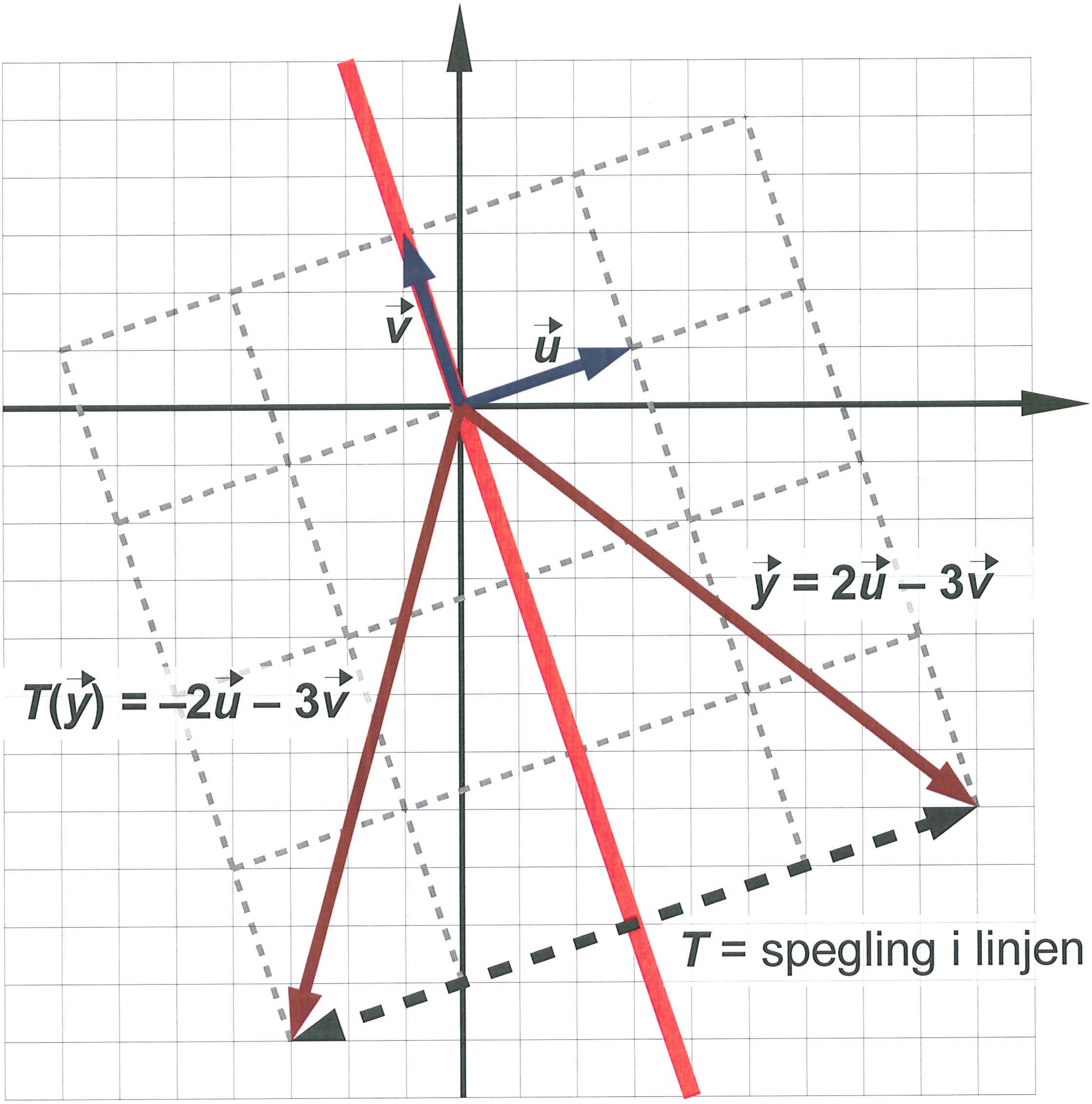
$$=(-x_1)\vec{u}+x_2\vec{v}$$

$$T(\vec{y})=T\left(\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=(-x_1)\vec{u}+x_2\vec{v}=\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

Om $\vec{y}$ har koord.-vektorn $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ i basen B så har $T(\vec{y})$ koord.-vektorn $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ i basen B.

$$\vec{y}=3\vec{u}-2\vec{v}=\underbrace{\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-3\end{bmatrix}}\quad \text{ger}\quad T(\vec{y})=\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\vec{u}&\vec{v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-9\end{bmatrix}}$$




$\vec{y}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$T(\vec{y})$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ i samma bas.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Exempel. Rotation $\frac{\pi}{3}$ rad $(60^\circ)$ moturs:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Låt $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos \pi/3 \\ \sin \pi/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

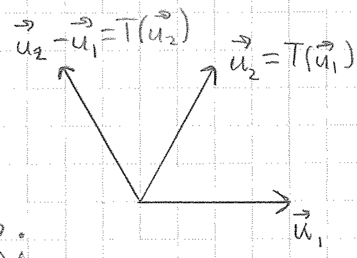
Sätt $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\}$

Vi ser att $T(\vec{u}_1) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \vec{u}_2$

och $T(\vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 - 3/4 \\ \sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$$




Låt $\vec{y}$ ha koordinatvektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i basen $B$:

$$\vec{y} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $T(\vec{y}) = T(x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2) = x_1 T(\vec{u}_1) + x_2 T(\vec{u}_2)$

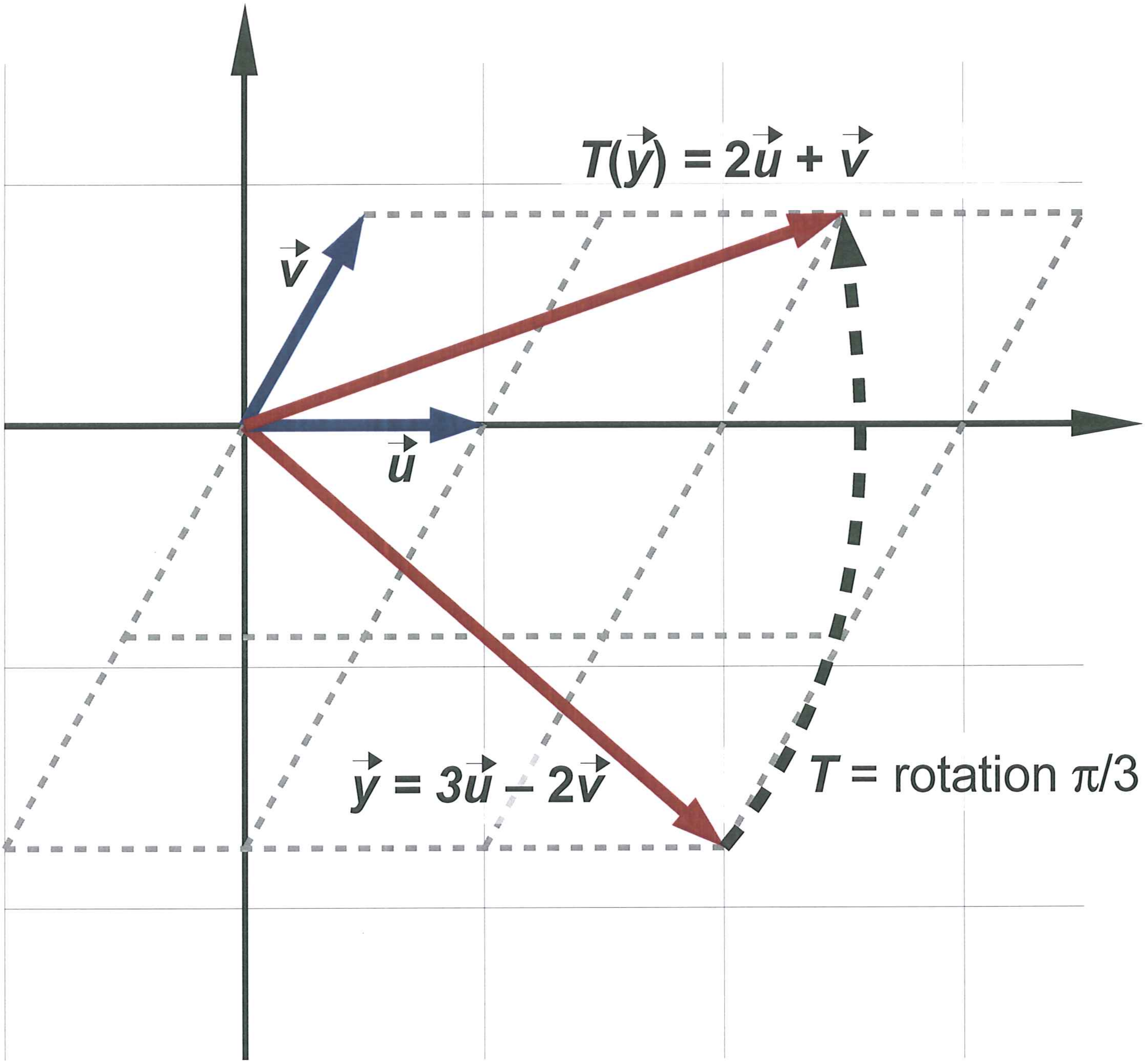
$$= x_1 \vec{u}_2 + x_2 (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

$$= (-x_2)\vec{u}_1 + (x_1 + x_2)\vec{u}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Om $\vec{y}$ har koord.-vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i basen $B$, så har $T(\vec{y})$ koord-vektorn $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i basen $B$.

Så $[T(\vec{y})]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\vec{y}]_B$




$\vec{y}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ i basen $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$.

$T(\vec{y})$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i samma bas.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12-6

Mönster: Sätt $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ = matrisen för T i standardbasen

$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = matrisen för T i basen B.

$S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Vi har följande diagram:

$$\begin{tikzcd} \vec{y} = S[\vec{y}]_B \arrow[r, "A"] & T(\vec{y}) = A\vec{y} = S[T(\vec{y})]_B \\ {[\vec{y}]_B} \arrow[u, "S"] \arrow[r, "C"] & {[T(\vec{y})]_B = C[\vec{y}]_B} \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Observera att $AS[\vec{y}]_B = SC[\vec{y}]_B$ för alla $\vec{y}$,
dvs $AS = SC$

Exemplet: $AS = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

$SC = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

[Notera att $A = \begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} [T(\vec{u}_1)]_B & [T(\vec{u}_2)]_B \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}$

$SC = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T(\vec{u}_1)]_B & [T(\vec{u}_2)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(u_1) & T(u_2) \end{bmatrix}$]

$AS = SC$ kan skrivas om som $A = SCS^{-1}$ eller
$C = S^{-1}AS$.

Allmänt. Låt $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$

Låt $T$ vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$.

Om $\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

så har $T(\vec{y})$ koordinatvektorn

$$\begin{bmatrix} [T(\vec{v}_1)]_B & \cdots & [T(\vec{v}_n)]_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

i basen $B$.

Koordinatvektorerna för $T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n)$ i basen $B$.

Sätt $A$ = matrisen för $T$ i standardbasen

$C = \begin{bmatrix} [T(\vec{v}_1)]_B & \cdots & [T(\vec{v}_n)]_B \end{bmatrix}$ = matrisen för $T$ i basen $B$

$S = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$

Då gäller $AS = SC \iff C = S^{-1}AS$

$\iff A = SCS^{-1}$

Exemplet med spegling: $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$S^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, så

$$A = SCS^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

# Avsnitt 4.3

Läsanvisningar. För att klara uppgifterna 61 och 63 i detta avsnitt, behöver du läsa sidorna 177-179. Hoppa över sidorna 172-176, för dessa kräver teori från avsnitt 4.1-4.2 (som inte ingår). Skippa även exempel 5, 6 och 8, men läs exempel 7 noggrant.

Genomgång av sid 177. Låt

$$B_1 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \quad \text{och} \quad B_2 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$$

vara två baser för ett delrum $V$ till $\mathbb{R}^n$

Problem. Antag att vi har koordinatvektorn $[\vec{y}]_{B_2}$ för en vektor $\vec{y}$ i basen $B_2$.
Vad blir $[\vec{y}]_{B_1}$, dvs koord.-vektorn, i basen $B_1$?

Lösning. Säg att $[\vec{y}]_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \iff \vec{y} = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \dots + x_m\vec{w}_m$

Var och en av $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ kan uttryckas i basen $B_1$ som $[\vec{w}_1]_{B_1}, \dots, [\vec{w}_m]_{B_1}$. Vi får att

$$[\vec{y}]_{B_1} = [x_1\vec{w}_1 + \dots + x_m\vec{w}_m]_{B_1} = x_1[\vec{w}_1]_{B_1} + \dots + x_m[\vec{w}_m]_{B_1}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} [\vec{w}_1]_{B_1} & \dots & [\vec{w}_m]_{B_1} \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = S_{B_2 \to B_1} [\vec{y}]_{B_2}$$

$S_{B_2 \to B_1}$ = basbytesmatrisen från $B_2$ till $B_1$

Faktum: $S_{B_1 \to B_2} = (S_{B_2 \to B_1})^{-1}$, ty $\begin{cases} [\vec{y}]_{B_1} = S_{B_2 \to B_1}[\vec{y}]_{B_2} \\ [\vec{y}]_{B_2} = S_{B_1 \to B_2}[\vec{y}]_{B_1} \end{cases}$

12-9

**Exempel.** Tre baser för $\mathbb{R}^2$:

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(standardbasen)

För varje vektor $\vec{y}$ gäller att $[\vec{y}]_E = \vec{y}$, så

$$S_{B_1 \to E} = \left[ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_E \ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_E \right] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S_{E \to B_1} = \left( S_{B_1 \to E} \right)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$ ger $\left[\vec{y}\right]_{B_1} = \left( S_{E \to B_1} \right) \left[ \vec{y} \right]_E = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$,

dvs $\vec{y} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Vad blir $S_{B_2 \to B_1}$? Svar: $\left[ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_1} \ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_1} \right]$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, där $a \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, där $b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_{B_1 \to E_1} \, S_{B_2 \to B_1} = S_{B_2 \to E_1} \qquad S_{B_2 \to B_1} = S_{E_1 \to B_1} \, S_{B_2 \to E_1}$$

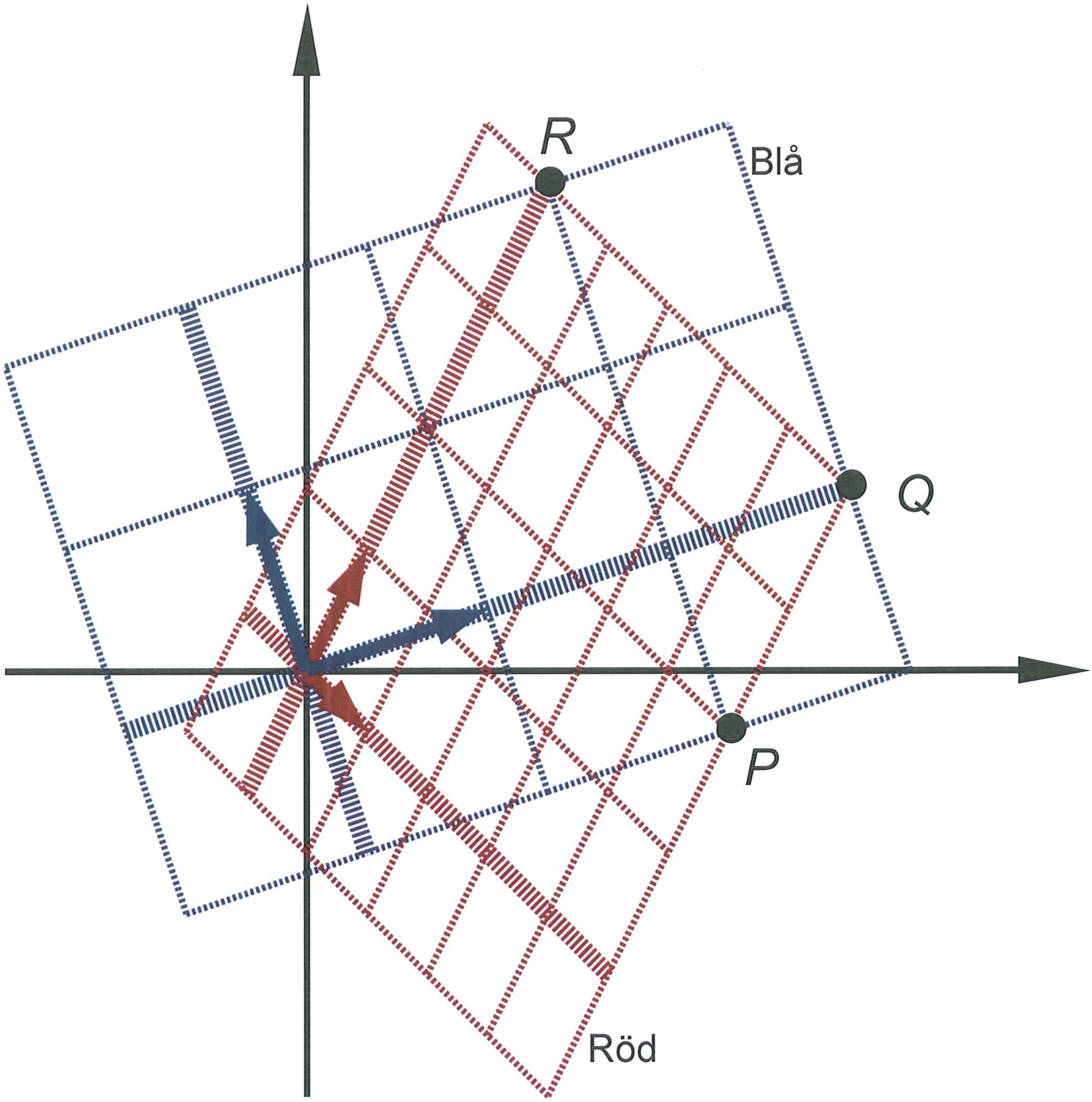
Alltså: $S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

**Exempel.** En vektor $\vec{y}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ i basen $B_2$. Då har vektorn $\vec{y}$ koordinatvektorn $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen $B_1$. Kontroll:

$$\vec{y} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \vec{y} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

basen $B_2$      basen $B_1$

Samma!




| Position | Koordinatvektor i **blå bas $B_1$** | Koordinatvektor i **röd bas $B_2$** |
|---|---|---|
| $P$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ |
| $Q$ | $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ |
| $R$ | $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ |