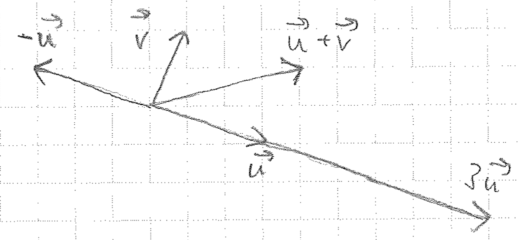
Avsnitt 3.3: Dimensionen för ett delrum till $\mathbb{R}^n$

Kom ihåg: delrum till $\mathbb{R}^n$ = mängd i $\mathbb{R}^n$ sluten under addition och skalärmultiplikation



$$\left(\vec{u}, \vec{v} \text{ i mängden} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}+\vec{v} \\ k\vec{u} \end{cases} \text{ i mängden}\right)$$

$\uparrow$ godtycklig skalär

Exempel: linjer och plan genom origo, $\mathbb{R}^n$ självt, nollrum, bildrum.

Bas för ett delrum V = uppsättning vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sådan att vaje vektor $\vec{w}$ i V kan skrivas

$$\vec{w} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_m\vec{v}_m$$

för <u>unika</u> skalärer $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Titta på $V = \mathbb{R}^2$. En bas för $\mathbb{R}^2$ kan <u>inte</u> bestå av

* <u>en</u> vektor (ger bara en linje).
* <u>tre</u> vektorer. Anta nämligen att $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ är tre vektorer i $\mathbb{R}^2$. Då har ekvationen

$$x_1\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oändligt många lösningar, ty antal variabler är större än antal ekvationer

Varje bas för $\mathbb{R}^2$ består alltså av <u>två</u> vektorer.

Mer allmänt gäller att

* varje bas för $\mathbb{R}^n$ består av n vektorer
* varje bas för ett delrum till $\mathbb{R}^n$ består av samma antal vektorer.

Se sid 124-125 för bevis.

Dimensionen av ett delrum V till $\mathbb{R}^n$ är antalet vektorer i en bas för V och betecknas $\dim(V)$.

Exempel. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\text{linje}) = 1$, $\dim(\text{plan i } \mathbb{R}^3) = 2$

Vi kan inte hitta en uppsättning med fler än $\dim(V)$ linjärt oberoende vektorer i V.

Låt A vara en matris av storlek $n \times k$.
Bildrummet $\operatorname{im}(A)$ = mängden av alla $\vec{y}$ i $\mathbb{R}^n$ så att $\vec{y} = A\vec{x}$ för något $\vec{x}$.
Nollrummet $\ker(A)$ = mängden av alla $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^k$ så att $A\vec{x} = \vec{0}$

Vi har att $\begin{cases} \dim(\operatorname{im}(A)) = \text{antal ledande variabler} = \operatorname{rank}(A) \\ \dim(\ker(A)) = \text{antal fria variabler} \end{cases}$

Alltså är $\dim(\operatorname{im}(A)) + \dim(\ker(A)) = \underbrace{\text{antal kolumner i } A}_{= \text{antal variabler}} = k$

$\dim(\ker(A)) = 0 \iff$ kolumnerna i A är en bas för $\operatorname{im}(A)$.
I fallet då $k = n$, dvs A är kvadratisk, är kolumnerna en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om A är inverterbar.

11-3

Exempel $A = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (dvs A redan reducerad)

A har $\boxed{4}$ kolumner

En bas för im(A): $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (kolumner med ledande ettor)

Alltså är $\dim(\mathrm{im}(A)) = \boxed{2}$

En bas för ker(A) kräver några steg extra:

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + (-3)x_4 = 0 \\ x_3 + (-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ x_2 = s \\ x_4 = t}}{=} \begin{bmatrix} -2s + 3t \\ s \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En bas för ker(A): $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Alltså är $\dim(\ker(A)) = \boxed{2}$

$$\Rightarrow \quad \dim(\mathrm{im}(A)) + \dim(\ker(A)) = \text{antal kolumner i } A$$

$$\boxed{2} + \boxed{2} = \boxed{4}$$

$= \text{antal variabler } (x_1, x_2, x_3, x_4)$

11-4

Avsnitt 3.4: koordinater

Inledande exempel: låt $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$, ty ekvationen

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 = \vec{y}$$

har en unik lösning för varje högerled $\vec{y}$:

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 = \vec{y} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

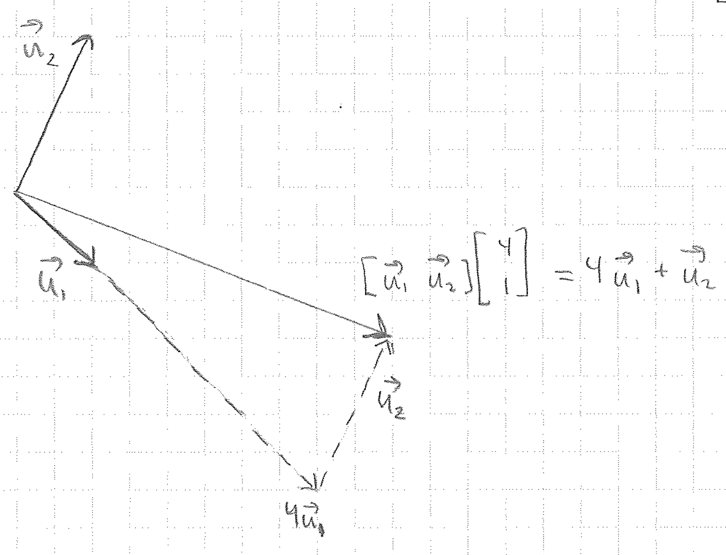
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

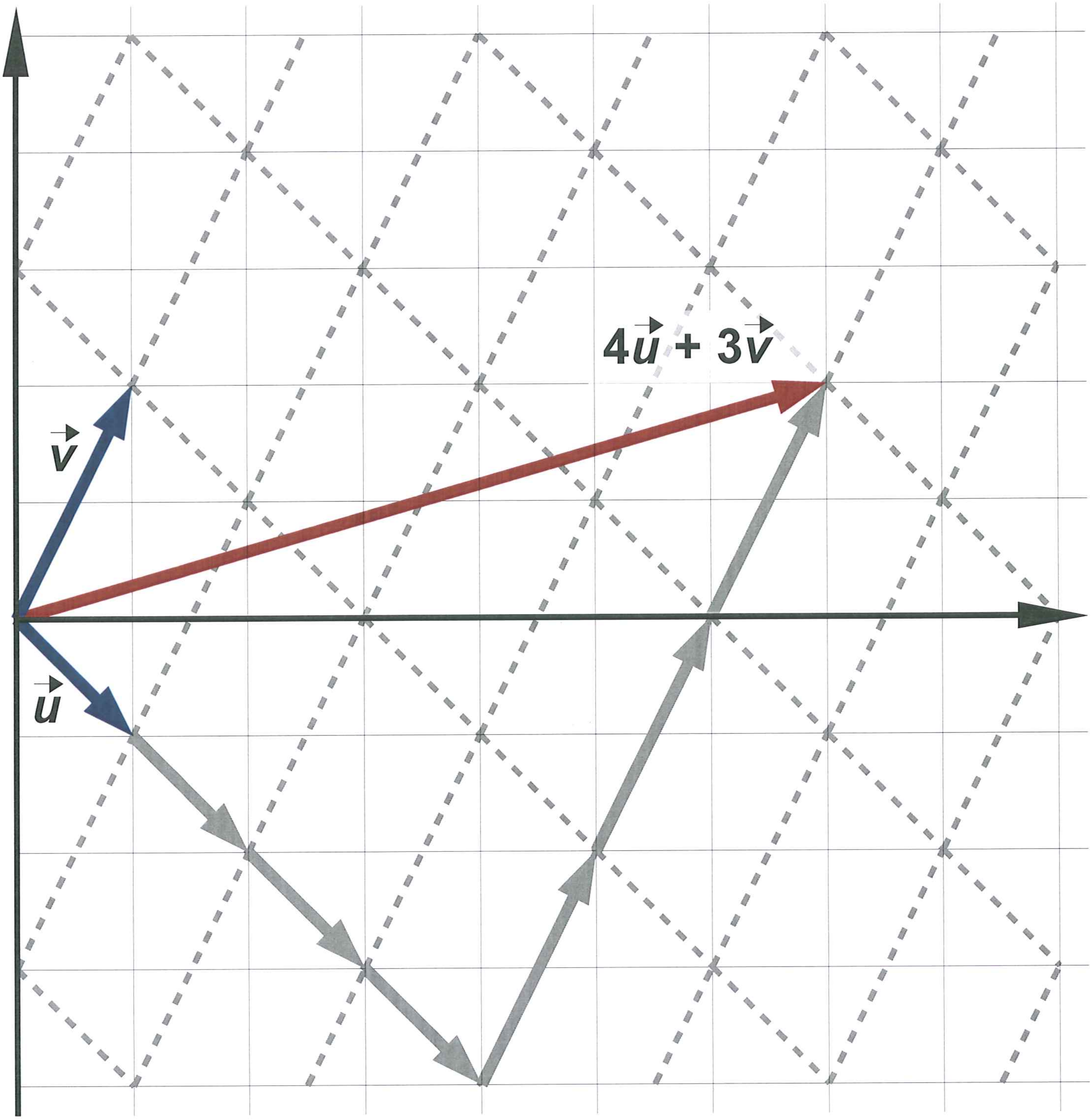
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ är <u>koordinatvektorn</u> för $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

Exempel: om $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, så får vi koordinatvektorn

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ dvs}$$

$$4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \left(\text{stämmer: } 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$





$4\vec{u} + 3\vec{v}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ i basen $\{\, \vec{u}, \vec{v} \,\}$

$$4\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

11-6

Allmänt: låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ vara en bas för ett delrum V till $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\vec{y}$ kan skrivas unikt som

$$\vec{y} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_m\vec{v}_m = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ är <u>koordinatvektorn</u> för $\vec{y}$ i basen

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$. Vi skriver $[\vec{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

Obs: $\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \end{bmatrix}[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$

Exempel. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Då är $[\vec{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, ty $\vec{y} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

För vilken vektor $\vec{w}$ gäller att $[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$?

Svar: $\vec{w} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

Alternativ: $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ $\left(\vec{w} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}[\vec{w}]_{\mathcal{B}}\right)$

11-7

Exempel. Bestäm en bas för planet $6x-3y-2z=0$, och hitta koordinatvektorn i denna bas för vektorn $\begin{bmatrix}2\\10\\-9\end{bmatrix}$

[Obs: när vi pratar om en vektor utan att hänvisa till en bas, är vektorn uttryckt i standardbasen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$]

Lösning. $6x-3y-2z=0 \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{3}t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

$$\iff \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}s + \frac{1}{3}t\\ s \\ t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1/2\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1/3\\0\\1\end{bmatrix}$$

En bas för planet är alltså $\left\{\begin{bmatrix}1/2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

Vi kan "snygga till" basen genom att multiplicera vektorerna med 2 resp. 3 och få $2\begin{bmatrix}1/2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ och $3\begin{bmatrix}1/3\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$

En annan bas för planet är därmed $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right\} = \mathcal{B}$

Uttryck $\begin{bmatrix}2\\10\\-9\end{bmatrix}$ i denna bas $\mathcal{B}$ (obs: svaret beror på vårt val av bas)

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\10\\-9\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\10\\-9\end{bmatrix}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\2 & 0 & 10\\0 & 3 & -9\end{array}\right] \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 = 10 \\ 3x_2 = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Alltså är koordinatvektorn $\left(\begin{bmatrix}2\\10\\-9\end{bmatrix}\right)_{\mathcal{B}}$ lika med $\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$, ty

$$5\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\10\\-9\end{bmatrix}$$