10 – (1) <u>Avsnitt 3.2</u> + material från avsnitt 3.1

<u>Spannet</u> av en uppsättning vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ består av alla linjärkombinationer av $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$:

$\vec{u}$ tillhör spannet $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_k\vec{v}_k$ för skalärer $x_1, x_2, \dots, x_k$.

<u>Sats</u> Bildrummet av $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ är lika med spannet av kolumnerna i A.

Om $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$, så är nämligen

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_k\vec{v}_k$$

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Då består bildrummet av alla linjärkombinationer $x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\left(= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$

Annan beteckning på spann: linjärt hölje

10-2

<u>Nollrummet</u> till en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ med matris A består av alla $\vec{x}$ sådana att

$$T(\vec{x}) = \vec{0} \quad , \quad \text{dvs} \quad A\vec{x} = \vec{0}$$

Nytt ord på gammalt begrepp: lösningsmängden till ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$

Man skriver ibland $\ker(T)$ eller $\ker(A)$ för att beteckna nollrummet (ker = kernel = kärna)

* Nollrummet är en delmängd till <u>domänen</u> $\mathbb{R}^k$
* Bildrummet är en delmängd till <u>målrummet</u> $\mathbb{R}^n$

<u>Exempel</u> Bestäm nollrummet till avbildningen med matris

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning. Nollrummet = lösningsmängden till ekvationen

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

högerledet kan uteslutas då det är noll

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \end{bmatrix} \left(\tfrac{1}{9}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} (2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/9 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2/9\, x_3 + 5/3\, x_4 = 0 \\ x_2 + 1/9\, x_3 - 2/3\, x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2/9\, x_3 - 5/3\, x_4 \\ x_2 = -1/9\, x_3 + 2/3\, x_4 \end{array}$$

$$\underset{\boxed{\begin{array}{l} x_3 = s \\ x_4 = t \end{array}}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2/9)s - 5/3\, t \\ (-1/9)s + 2/3\, t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2/9 \\ -1/9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar: Nollrummet är <u>spannet</u> av vektorerna $\begin{bmatrix} -2/9 \\ -1/9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

10 – 3

Ett <u>delrum</u> till $\mathbb{R}^n$ är en delmängd W till $\mathbb{R}^n$ sådan att

(1) $\vec{0}$ tillhör W

(2) Om $\vec{x}$ och $\vec{y}$ tillhör W, så tillhör även $\vec{x}+\vec{y}$ och $k\vec{x}$ W för varje skalär k.

(2) betyder att om $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ tillhör W och $x_1, x_2, \ldots, x_m$ är skalärer, så är även linjärkombinationen

$$x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_m\vec{w}_m$$

en vektor i W

Exempel: $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linjär avbildning med matris A.

$\boxed{\text{Nollrummet } \ker(T) = \ker(A) \text{ är ett delrum till } \mathbb{R}^k}$

Bevis: $\vec{x}, \vec{y}$ tillhör $\ker(T) \Leftrightarrow T(\vec{x}) = \vec{0}$ och $T(\vec{y}) = \vec{0}$

$\Rightarrow T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = \vec{0}$ och $T(k\vec{x}) = kT(\vec{x}) = \vec{0}$.

Alltså gäller (2). $T(\vec{0}) = \vec{0}$, så (1) gäller också

$\boxed{\text{Bildrummet } \mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(A) \text{ är ett delrum till } \mathbb{R}^n}$

Bevis: $\vec{x}, \vec{y}$ tillhör $\mathrm{im}(T) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = T(\vec{u}) \text{ och } \vec{y} = T(\vec{v}) \\ \text{för vektorer } \vec{u} \text{ och } \vec{v} \text{ i } \mathbb{R}^k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u}+\vec{v}) = \text{bilden av } \vec{u}+\vec{v} \\ k\vec{x} = kT(\vec{u}) = T(k\vec{u}) = \text{bilden av } k\vec{u} \end{cases}$$

Alltså gäller (2). $\vec{0} = T(\vec{0})$ = bilden av $\vec{0}$, så (1) gäller också.

Exempel. Ett plan på formen $ax+by+cz=0$ (plan genom origo) utgör ett delrum till $\mathbb{R}^3$. Vi kan nämligen skriva planets ekvation som

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}}_{1\times 3\text{-matris}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

dvs planet är <u>nollrummet</u> till matrisen $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$

Allmänt i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Följande mängder är de enda delrummen till $\mathbb{R}^2$:

- $\{\vec{0}\}$
- Varje linje genom origo.
- Hela $\mathbb{R}^2$

Alla delrum till $\mathbb{R}^3$:

- $\{\vec{0}\}$
- Varje linje och plan genom origo.
- Hela $\mathbb{R}^3$

Alltså: delrum till $\mathbb{R}^n$ generaliserar begreppen linje och plan genom origo i planet och rummet.

En uppsättning vektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ är <u>linjärt beroende</u> om en av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Exempel $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\6\\12\end{bmatrix}$ är linjärt beroende, ty

$$\begin{bmatrix}7\\6\\12\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$ (se sid 9-2)

Alternativ formulering: $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ är linjärt beroende om det finns $c_1, \ldots, c_m$, <u>inte alla noll</u>, så att

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_m\vec{v}_m = \vec{0}.$$

Exempel:
$$3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}7\\6\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Exempel: $7\cdot\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}7\\14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,

så $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\14\end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Linjärt oberoende = <u>inte</u> linjärt beroende.

Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ är en <u>bas</u> för delrummet W i $\mathbb{R}^n$ om

(1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ är linjärt oberoende

(2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ spänner upp W.

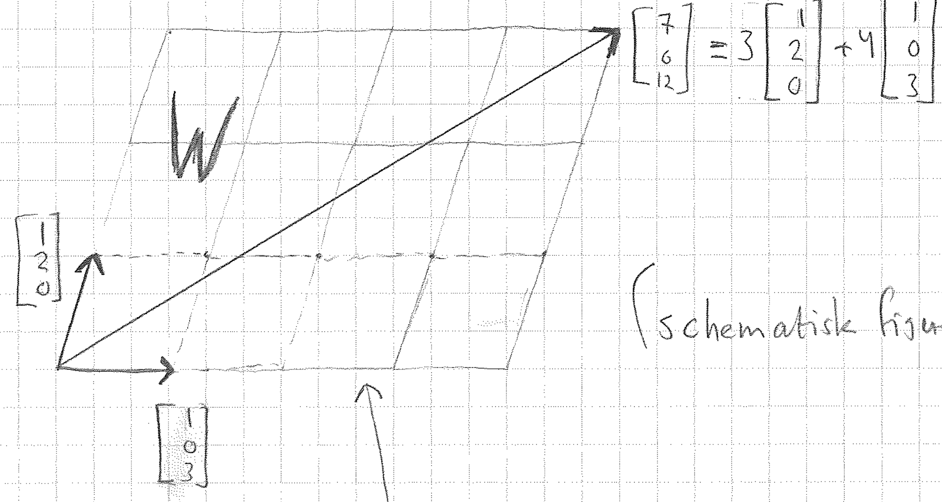
(Obs: detta har <u>inget</u> med basyta eller bas till rektangel/triangel att göra. Samma ord – olika betydelser!)

Exempel. Spannet av $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\6\\12\end{bmatrix}$ är ett delrum W till $\mathbb{R}^3$.

Enligt ovan är de inte linjärt oberoende, så de utgör inte en bas för W. Geometrisk tolkning: W är ett plan, och i ett plan kan vi inte hitta tre linjärt oberoende vektorer (= tre vektorer som spänner upp en parallellepiped med volym, dvs inte "platt").

Dock är $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ linjärt oberoende (dvs inte parallella)

så en bas för W är $\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} \right\}$



(schematisk figur)

Obs: $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ ger upphov till ett koordinatsystem (rutnät)

Mer om detta på föreläsning 11.

10-7

Bas till bildrummet för en matris A:

(1) Skriv A på reducerad trappstegsform

(2) Markera kolumnerna med <u>ledande ettor</u>

(3) Motsvarande kolumner i A är en bas för im(A)

<u>Exempel</u> (se 9-4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$. Bildrummet är spannet av

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Rättelse}}$

(1) Skriv om A med Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} 3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -3$$

$$\sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Kolumner med ledande ettor.

Vi ser: [kolumn 2] = 3 [kolumn 1] $\iff \vec{u}_2 = 3\vec{u}_1$

[kolumn 4] = (−1)[kolumn 1] + 2[kolumn 3] $\iff \vec{u}_4 = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3$

[kolumn 5] = (−3)[kolumn 1] + 1·[kolumn 3] $\iff \vec{u}_5 = -3\vec{u}_1 + \vec{u}_3$

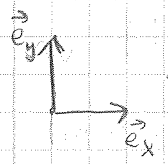
$\vec{u}_2$, $\vec{u}_4$ och $\vec{u}_5$ ligger alltså i spannet av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_3$

(3) Kolumn 1 och 3 i A är en bas för im(A):

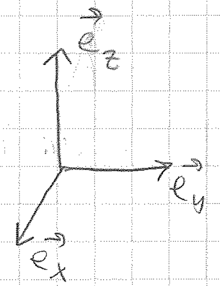
$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

(Obs: kolumn 1 och 3 i den reducerade matrisen är <u>inte</u> en bas för im(A).)

Baser i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ såg vi redan vecka 1.



← bas i planet   bas i rummet →



<u>Standardbasen</u> i $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

i $\mathbb{R}^3$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(osv i högre dimensioner)

Viktig egenskap hos en bas för ett delrum W:
om $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ är en bas, så kan varje element $\vec{w}$ i W skrivas som

$$\vec{w} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_m\vec{v}_m$$

för <u>unika</u> skalärer $x_1, x_2, \dots, x_m$

Ekvationen $\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \vec{w} \iff A\vec{x} = \vec{w}$

har alltså en unik lösning för varje $\vec{w}$ i W
(och ingen lösning om $\vec{v}$ är utanför W).

<u>Ekvivalent</u>: ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ har den unika lösningen $\vec{0}$, dvs nollrummet till A är $\{\vec{0}\}$

<u>Ekvivalent</u>: matrisen A har rang m = antal kolumner

<u>Ekvivalent</u>: ledande ettor i alla kolumner om vi gör Gauss-Jordan på A, så A har minst lika många rader som kolumner.