9-1

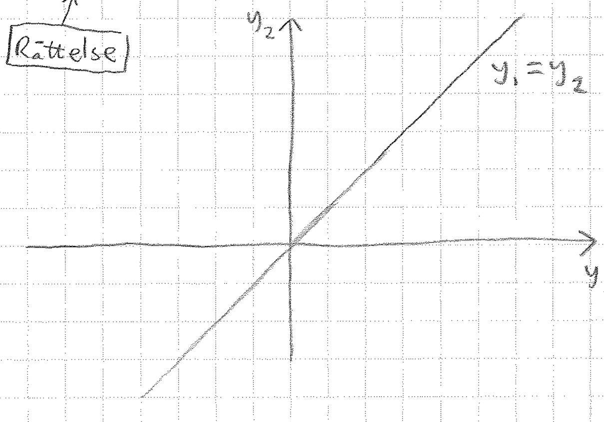
Avsnitt 3.1: Bildrummet och nollrummet

bildrum = image, nollrum = kernel

__Bilden__ av en funktion T från A till B är mängden av alla β i B sådana att $T(\alpha)=\beta$ för __minst__ ett α i A.

__Exempel__ Om $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$, så består bilden av T av alla vektorer på formen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$. Bilden är alltså lika med $\boxed{\text{Rättelse}}$ linjen $y_1 = y_2$.

$\boxed{\text{Rättelse}}$



Om $T(\vec{x}) = \vec{0}$ för alla $\vec{x}$, så innehåller bilden ett enda element: $\vec{0}$.

Om $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$, så är bilden hela $\mathbb{R}^2$.

För varje $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ kan vi nämligen lösa ekvationen

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -b_2 \\ x_2 = b_1 + b_2 . \end{cases}$$

För linjära avbildningar säger vi ofta __bildrummet__ i stället för bilden.

9-2

Exempel. Låt
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bestäm konstanten k så att $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$ tillhör bildrummet för T.

Lösning. Vi vill bestämma k så att ekvationen
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$$
är lösbar. Nu är
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ k \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & k-12 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & k-12 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ 0 = k-12 \end{cases}$$

Går att lösa precis då $\underline{k=12}$ Svar: $k=12$.

9-3

<u>Spannet</u> av en uppsättning vektorer $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ består av alla linjärkombinationer av $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$:

$$\vec{u} \text{ ligger i spannet } \Leftrightarrow \vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k$$

för skalärer $c_1, c_2, \ldots, c_k$

<u>Sats</u> Bildrummet av $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ är lika med spannet av kolumnerna i A.

Om $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ så är nämligen

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_k\vec{v}_k$$

<u>Exempel.</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Då består bildrummet av T av alla kombinationer

$$x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$$

Behöver vi alla tre vektorer för att beskriva bildrummet?

Nej, ty $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vi kan därmed skriva $x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\left(-\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{(x_1 - x_3)}_{\hat{x}_1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \underbrace{(x_2 - x_3)}_{\hat{x}_2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \hat{x}_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \hat{x}_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bildrummet är alltså spannet av $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

9-4:

Hitta en minimal uppsättning vektorer så att deras spann utgör bildrummet till avbildningen med matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Lösning. Bildrummet är spannet av kolumnerna i A:

$$\underset{\vec{u}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{\vec{u}_2}{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}} \quad \underset{\vec{u}_3}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} \quad \underset{\vec{u}_4}{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}} \quad \underset{\vec{u}_5}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Metod: <u>ta bort</u> vektorer som ligger i spannet (är linjärkombinationer) av vektorer till vänster.

Faktum: linjärkombinationer mellan kolumnerna bevaras under radoperationer. Vi skriver om A med Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \overset{-2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I den nya matrisen gäller: [kolumn 2] = 3 · [kolumn 1]

[kol. 4] = (−1) [kol 1] + 2 [kol. 3]

[kol. 5] = (−3) · [kol 1] + 1 · [kol 3]

Exempel:

$$\underset{\text{kol. 5}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = (-3)\underset{\text{kol. 1}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + 1 \cdot \underset{\text{kol. 3.}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

<u>Samma</u> gäller i den ursprungliga matrisen: $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{u}_1$

$$\vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1)\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$$ och $\vec{u}_5 = (-3)\vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_3$

Vi kan ta bort $\vec{u}_2, \vec{u}_4, \vec{u}_5$. Kvar blir $\boxed{\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}$

Princip: behåll kolumner i A svarande mot <u>ledande ettor</u> i rref(A)

<u>Nollrummet</u> till en linjär avbildning T består av alla $\vec{x}$ sådana att $T(\vec{x}) = \vec{0}$

Om A är matrisen för T, så är alltså nollrummet mängden lösningar till ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$.

Man skriver ibland $\ker(T)$ eller $\ker(A)$ för att beteckna nollrummet (ker = kernel)

Obs: om T går från $\mathbb{R}^k$ till $\mathbb{R}^n$, så är

* bildrummet en delmängd av <u>målrummet</u> $\mathbb{R}^n$
* nollrummet en delmängd av <u>domänen</u> $\mathbb{R}^k$

<u>Exempel</u> Bestäm nollrummet till avbildningen med matris

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi vill alltså hitta alla $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ så att $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{1}{9} \end{matrix}$$

Kan utelämna högerledet då det är noll

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2/9 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/9 & -2/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2/9\, x_3 + 5/3\, x_4 = 0 \\ x_2 + 1/9\, x_3 - 2/3\, x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2/9\, x_3 - 5/3\, x_4 \\ x_2 = -1/9\, x_3 + 2/3\, x_4 \end{cases}$$

Med $x_3 = s$ och $x_4 = t$ får vi

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{9}s - \frac{5}{3}t \\ x_2 = -\frac{1}{9}s + \frac{2}{3}t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2/9 \\ -1/9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9-6

Egenskaper hos nollrum och bildrum

Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^k$ till $\mathbb{R}^n$ med tillhörande matris A ($n \times k$-matris)

Vi har att $A\vec{0} = \vec{0}$. Alltså:

$\uparrow$ k-vektor $\nwarrow$ n-vektor

* Nollvektorn i $\mathbb{R}^k$ tillhör nollrummet
* Nollvektorn i $\mathbb{R}^n$ tillhör bildrummet.

Låt p och q vara skalärer, och låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara k-vektorer.
Då är $A(p\vec{u} + q\vec{v}) = pA\vec{u} + qA\vec{v}$

* Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ tillhör nollrummet, så gör även $p\vec{u}+q\vec{v}$ det.
  (Om $A\vec{u} = A\vec{v} = 0$, så är $A(p\vec{u}+q\vec{v}) = 0$.)

* Om $\vec{x}$ och $\vec{y}$ tillhör bildrummet, så gör även $p\vec{x}+q\vec{y}$ det.
  (Om $\vec{x} = A\vec{u}$ och $\vec{y} = A\vec{v}$, så är $p\vec{x}+q\vec{y} = A(p\vec{u}+q\vec{v})$)

$\boxed{\text{Nollrummet} = \{\vec{0}\}}$ betyder att ekvationen

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

har en enda lösning. Inga fria variabler, och

$\boxed{\text{rangen av } A = \text{antalet kolumner i } A}$

$\boxed{\text{Bildrummet} = \text{hela målmängden } \mathbb{R}^n}$ betyder att rref(A) har en ledande etta i varje rad, och

$\boxed{\text{rangen av } A = \text{antalet rader i } A}$

Stor rang = stort bildrum = litet nollrum