8-①

En funktion T från en mängd A till en mängd B är <u>inverterbar</u> om det <u>för varje</u> β i B finns <u>exakt</u> ett α i A så att

$$T(\alpha) = \beta.$$

Vi kan då definiera <u>inversen</u> till T, betecknad T^{-1}, som uppfyller

$$T^{-1}(\beta) = \alpha \iff T(\alpha) = \beta$$

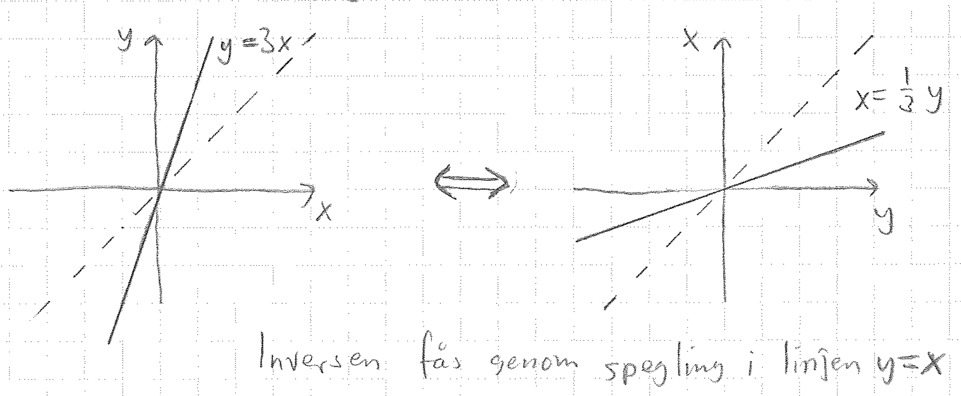
<u>Exempel</u> $A = B = \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$

För varje β vill vi hitta α så att

$$T(\alpha) = \beta \iff 3\alpha = \beta \iff \boxed{\alpha = \frac{1}{3}\beta}.$$

Vi ser att vi har <u>exakt en</u> lösning <u>för varje</u> β i $\mathbb{R}$.

Vi får att $T^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$



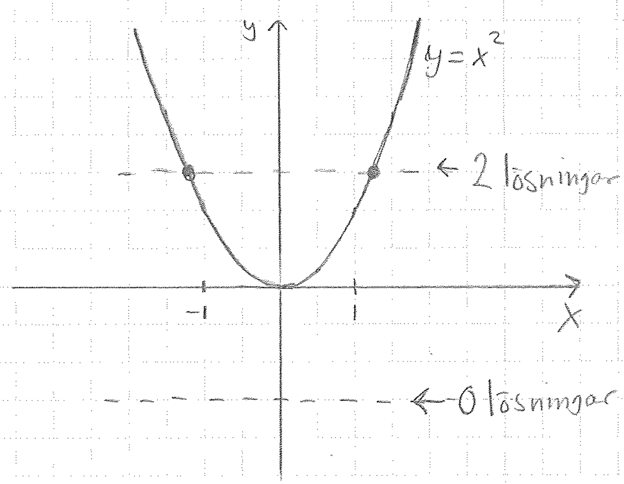
Inversen fås genom spegling i linjen $y=x$

<u>Exempel</u> Igen $A = B = \mathbb{R}$, men $T(x) = x^2$

<u>Inte</u> inverterbar. Studera nämligen ekvationen $T(\alpha) = \beta \iff \alpha^2 = \beta$

* <u>Ingen</u> (reell) lösning då $\beta < 0$
* <u>Två</u> lösningar då $\beta > 0$

Räcker med <u>en</u> av dessa för att dra slutsatsen att T inte är inverterbar.



Linjära avbildningar.

Exempel. Låt $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$.

Då är T inverterbar. Låt nämligen $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ vara godtycklig, och studera ekvationen

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{matrix} x_1 = -b_2 \\ x_2 = b_1 - x_1 = b_1 + b_2 \end{matrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

Detta ger att $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

Exempel. Låt $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Då är T inte inverterbar:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 0 = b_2 \end{cases}$$

* Ingen lösning om $b_2 \neq 0$
* Oändligt många lösningar då $b_2 = 0$: $\begin{cases} x_1 = b_1 - t \\ x_2 = t \end{cases}$ (t parameter)

Det räcker med en av dessa för att dra slutsatsen att T inte är inverterbar.

8_3 Låt T vara en inverterbar linjär avbildning med matris A, dvs

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Matrisen för T^{-1} betecknas A^{-1}, och är <u>inversen</u> till A:

$$T^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}.$$

Exempel (forts.)

Om $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

så är $T^{-1}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Alltså är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Observera att om $B = A^{-1}$, så är $A = B^{-1}$ (och vice versa)

$$\begin{array}{ccc} A\vec{x} = \vec{y} & \Leftrightarrow & A^{-1}\vec{y} = \vec{x} \\ \parallel & & \parallel \\ B^{-1}\vec{x} = \vec{y} & \Leftrightarrow & B\vec{y} = \vec{x} \end{array}$$

Annorlunda uttryckt: $(A^{-1})^{-1} = A$

A är <u>inverterbar</u> om A har en invers.

8-4 Vi vet att $A\vec{x} = \vec{y}$ har exakt en lösning bara då alla variabler är ledande, dvs rank(A) = antal kolumner i A.

Slutsats: om A är en inverterbar $r \times k$-matris, så är $\boxed{r \geq k}$, ty $\text{rank}(A) \leq r$ och $\text{rank}(A) = k$

Om A är en $r \times k$-matris, så är A^{-1} en $k \times r$-matris:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-vektor}}}{A\vec{x}} = \underset{\substack{\uparrow \\ r\text{-vektor}}}{\vec{y}} \iff A^{-1}\underset{\substack{\uparrow \\ r\text{-vektor}}}{\vec{y}} = \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-vektor}}}{\vec{x}}$$

Men A^{-1} är också inverterbar, så

$$\underbrace{\text{antal rader i } A^{-1}}_{k} \geq \underbrace{\text{antal kolumner i } A^{-1}}_{r}$$

Alltså: $\boxed{k \geq r}$

$r \geq k$ och $k \geq r$ ger $\boxed{k = r}$

Slutsats: Om A är inverterbar, så gäller att A är kvadratisk, dvs antal rader = antal kolumner

8-5

Hur inverterar man en matris? (Jätteviktigt!)

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$. Vill hitta matris B så att

$$A\vec{x} = \vec{y} \iff B\vec{y} = \vec{x}$$

Denna matris B är A^{-1}. Nu har vi att

$$A\vec{x} = \vec{y} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Trick: elementära radoperationer på båda sidorna samtidigt tills vänsterledet är på red. trappstegsform:

$$(*) \iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-3) \\ \\ \end{matrix} \qquad \left(\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (\frac{1}{2}) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = B\vec{y}$$

Alltså är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

8- 6

Kom ihåg: I_n är identitetsmatrisen av storlek $n \times n$:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{osv.}$$

För att invertera en $n \times n$-matris A, ställ upp matrisen

$[A \mid I_n]$ och använd Gauss-Jordan som i exemplet:

$$[A \mid I_n] \sim \cdots \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

Om det inte går att få I_n till vänster, så är A <u>inte</u> inverterbar.

<u>Exempel</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Vi får

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Går inte! Alltså är A inte inverterbar.

Observera att $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ekvationen $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ har alltså flera lösningar.

(Ett annat sätt att se att A inte är inverterbar.)

<u>Allmänt</u> En $n \times n$-matris A är inverterbar <u>precis då</u>

$A\vec{x} = \vec{0}$ har <u>en enda</u> lösning (nämligen $\vec{x} = \vec{0}$)

(Theorem 2.4.4 b)

<u>Viktiga egenskaper:</u> Om A är en inverterbar $n \times n$-matris, så gäller att

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{och} \quad A^{-1}A = I_n$$

Exempel: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (kontrollera!)

Om $AB = I_n$, gäller då att $BA = I_n$?
Svar: ja (förutsatt att A och B är $n \times n$-matriser)
Vi har då att $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$.

Bevis. B är inverterbar, ty $B\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow A(B\vec{x}) = A\vec{y}$

$$\Leftrightarrow (AB)\vec{x} = A\vec{y} \Leftrightarrow I_n\vec{x} = A\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A\vec{y}, \text{ unik lösning.}$$

Vi har alltså att B^{-1} existerar, så

$$AB = I_n \Leftrightarrow (AB)B^{-1} = I_nB^{-1} \Leftrightarrow A(BB^{-1}) = B^{-1}$$
$$\Leftrightarrow AI_n = B^{-1} \Leftrightarrow A = B^{-1}.$$

Vi får att $AB = B^{-1}B = I_n$, så $AB = I_n$

Inversen av en produkt (om den finns):

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Ty $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

8-8

Invers av en 2×2-matris.

Om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar, så är $ad-bc \neq 0$,

och $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Vi ser nämligen att $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+da \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Om $ad-bc \neq 0$ får vi alltså att

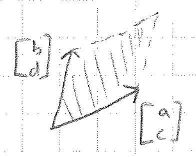
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 5 - 2\cdot 4}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Vad händer då $ad-bc=0$? Jo,

$ad-bc = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{\text{determinant}} = \pm$ area av parallellogram uppspänd av $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$



Om arean är noll, så är $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ parallella.

För varje $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ blir $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$,

en vektor parallell med $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

En invers kan inte existera i detta fall, för $A\vec{x} = \vec{y}$

har lösning bara då $\vec{y}$ är parallell med $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

Exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4=0$

Vi ser att $A\vec{x} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 2x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (x_1 - 2x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

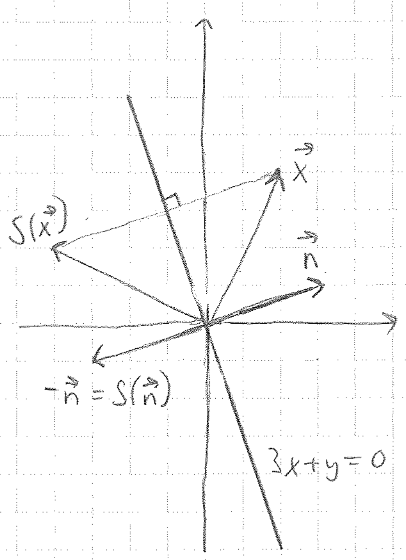
$A\vec{x} = \vec{y}$ har lösning endast då $\vec{y}$ är parallell med $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

8-9

Tillämpning av invers. Låt S vara spegling i linjen $3x+y=0$.

Linjens normal är alltså $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Metod för att beräkna matrisen A för S:



* S avbildar vektorer parallella med linjen på sig själva.
  Exempel: $S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, ty $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ är parallell med linjen
* S avbildar normaler till linjen på minus sig själva
  Exempel: $S\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Alltså är $A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ och $A\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, dvs

$$A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Sätt $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

Vi ser att $AB = C \iff ABB^{-1} = CB^{-1}$
$\iff A = CB^{-1}$

Nu är $B^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - 3\cdot(-3)}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, så

$$A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Alltså är matrisen för S

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$