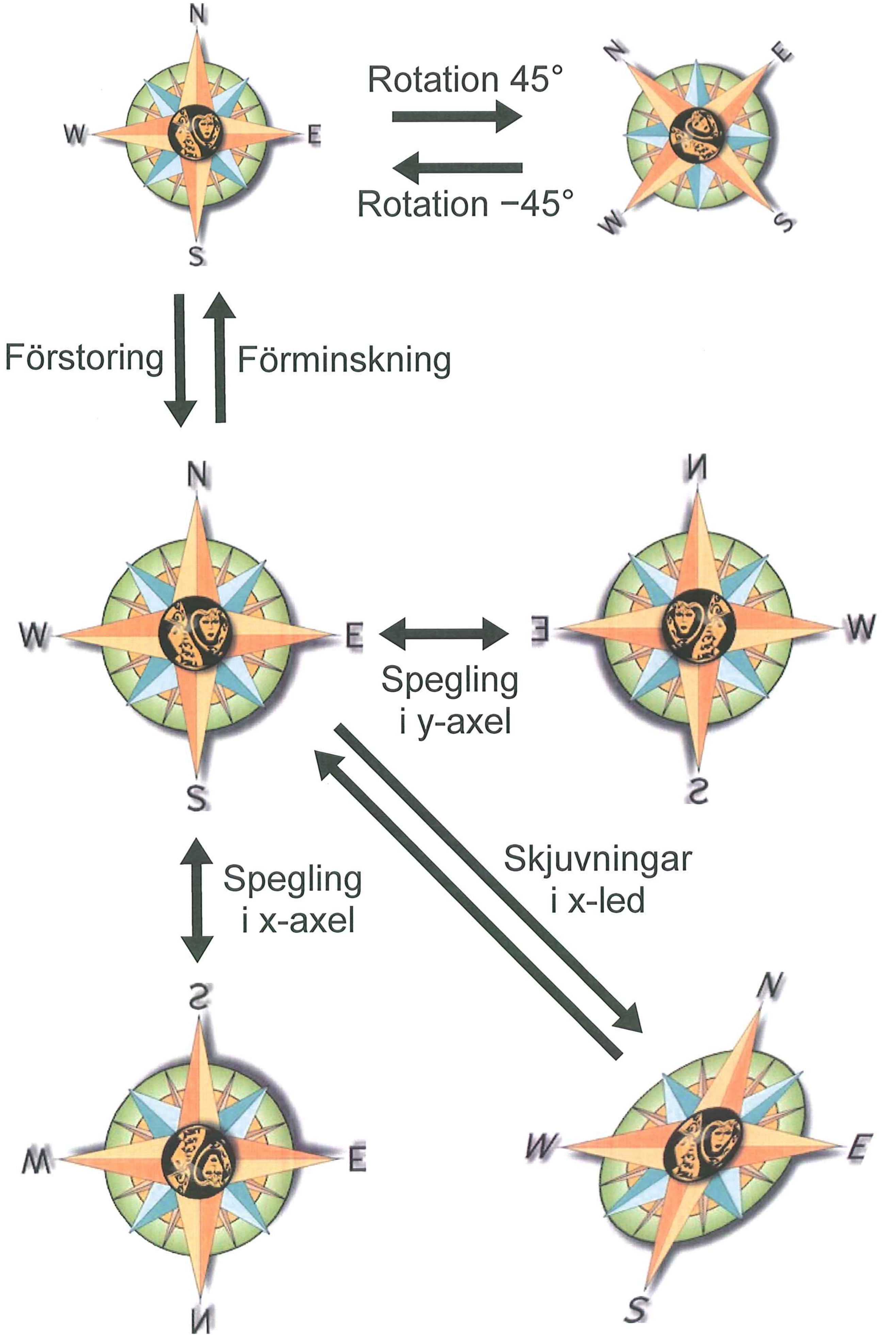

Rotation 45°
Rotation −45°
Förstoring
Förminskning
Spegling
i y-axel
Spegling
i x-axel
Skjuvningar
i x-led

7 - 2

Avsnitt 2.2: Linjära avbildningar i geometri

Kom ihåg: en <u>linjär avbildning</u> T från $\mathbb{R}^k$ till $\mathbb{R}^n$ har egenskapen att

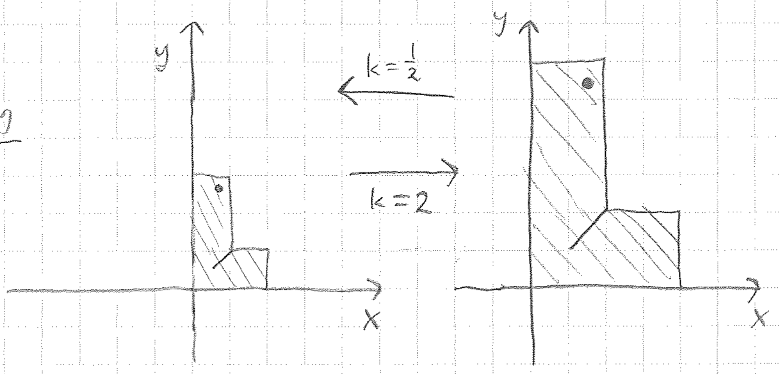
$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

för varje k-vektor $\vec{x}$, där A är en $n \times k$-matris.

Vi tittar nu på linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$.

Förstoring/Förminskning

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$



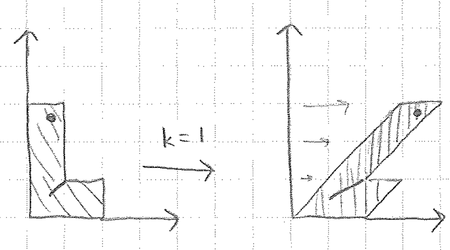
Förstoring: $k > 1$ (dilation)

Förminskning: $0 < k < 1$ (contraction)

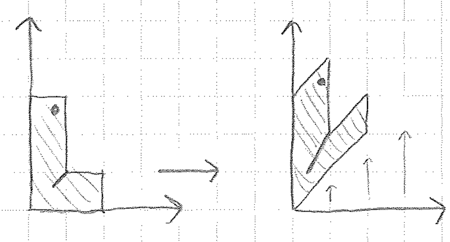
$$\mathbb{R}^3: \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}$$

Skjuvning (shear)

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$$



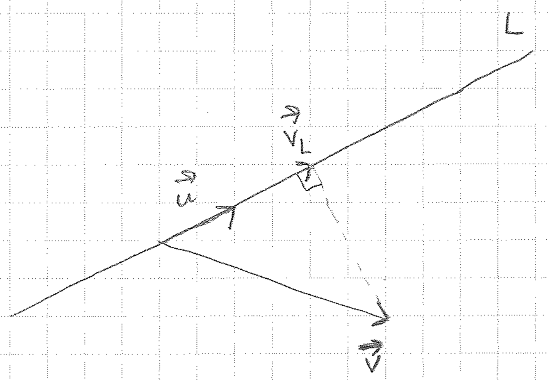
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$$



Se sid 63-64

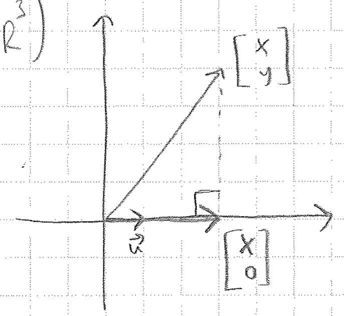
7 - 3

Ortogonal projektion



Vi vet sedan tidigare att den ortogonala projektionen av $\vec v$ på linjen L med riktningsvektor $\vec u$ är

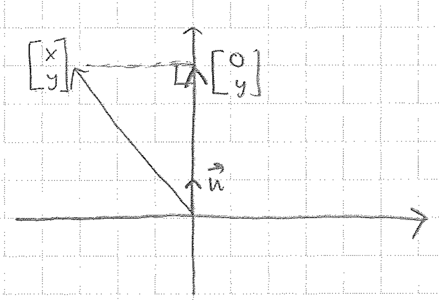
$$\vec v_L = \frac{\vec v \cdot \vec u}{\vec u \cdot \vec u}\,\vec u \quad (\text{i } \mathbb{R}^2 \text{ och } \mathbb{R}^3)$$



Projektion på x-axeln: $\vec u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Projektion på y-axeln: $\vec u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Projektion på linje med riktningsvektor $\vec u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\frac{x \cdot u_1 + y\, u_2}{u_1^2 + u_2^2}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\frac{\vec x \cdot \vec u}{\vec u \cdot \vec u}\vec u} = \frac{1}{u_1^2+u_2^2}\begin{bmatrix} u_1^2 x + u_1 u_2 y \\ u_1 u_2 x + u_2^2 y \end{bmatrix}$$

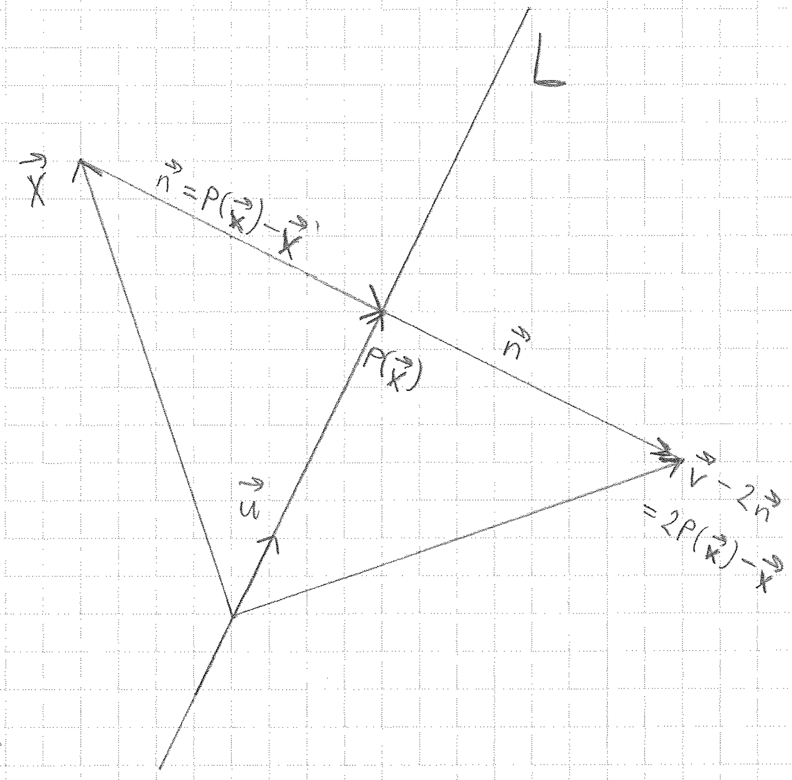
$$= \boxed{\frac{1}{u_1^2+u_2^2}\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

Exempel. $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ger $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Till exempel är $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} +5 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$

Boken skriver $\mathrm{proj}_L(\vec x)$

7-4



Spegling (reflection)

Spegla i en linje
= gå ortogonalt mot linjen och fortsätt gå lika lång sträcka ortogonalt bort från linjen

Låt P = ortogonal projektion

Vi går från $\vec{x}$ till $P(\vec{x})$ genom att addera $P(\vec{x}) - \vec{x}$ till $\vec{x}$. Dubbla sträckan blir $2(P(\vec{x}) - \vec{x})$.

Spegling = $\vec{x} + 2(P(\vec{x}) - \vec{x}) = 2P(\vec{x}) - \vec{x}$ (gäller i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$)

Om linjens riktningsvektor är $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, så blir speglingen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\begin{bmatrix} 2u_1^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & 2u_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{2P(\vec{x})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\vec{x}}$$

$$= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\begin{bmatrix} 2u_1^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\begin{bmatrix} u_1^2 + u_2^2 & 0 \\ 0 & u_1^2 + u_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\begin{bmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & u_2^2 - u_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Lättare komma ihåg $\boxed{T(\vec{x}) = 2P(\vec{x}) - \vec{x}}$!

Spegling i x-axel, dvs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

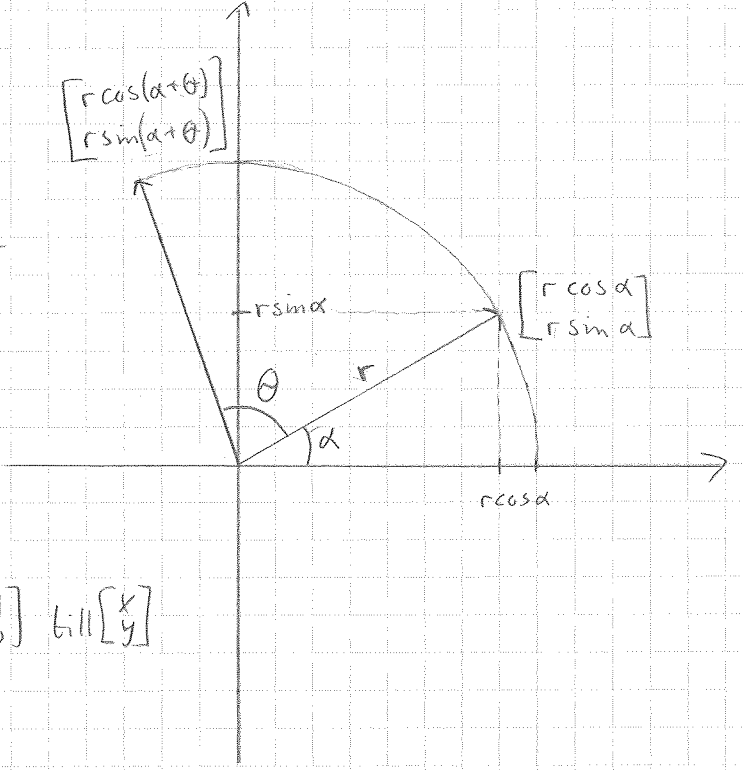
Spegling i y-axel, dvs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

Boken skriver $\text{ref}_L(\vec{x})$ (reflektion)

7 - 5

Rotation

Vi kan skriva en nollskild vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ på polär form:



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

α = vinkeln moturs från x-axeln $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ till $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Rotation θ radianer moturs:

$$T\left(\begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

Ser inte så linjärt ut? Jo,

$$r\cos(\alpha+\theta) = \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\cos\theta - \underbrace{r\sin\alpha}_{y}\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$$

Rättelse

$$r\sin(\alpha+\theta) = \underbrace{r\sin\alpha}_{y}\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x}\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Alltså: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Rotation med vinkeln θ ges alltså av $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Exempel. $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Då är $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ och $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

7-6 **Avsnitt 2.3: Matrismultiplikation**

Låt S och T vara linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$; säg att

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vad händer om vi först använder S och sedan T, dvs beräknar

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)\right)?$$

Svar: Vi får att

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 8x_1 + 1\cdot x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8x_1 + 1\cdot x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\left(x_1\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kolumn 1}}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}} + x_2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kolumn 2}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$= x_1\begin{bmatrix} 7\cdot 8 + (-6)\cdot 2 \\ (-5)\cdot 8 + 4\cdot 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 7\cdot 1 + (-6)\cdot 3 \\ (-5)\cdot 1 + 4\cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 7\cdot 8 + (-6)\cdot 2 & 7\cdot 1 + (-6)\cdot 3 \\ (-5)\cdot 8 + 4\cdot 2 & (-5)\cdot 1 + 4\cdot 3 \end{bmatrix}}_{\text{Rimlig definition av } \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & -11 \\ -32 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

T-matrisen S-matrisen

$$\text{Då blir } T\left(S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)\right) = \left(\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Princip:

$$\begin{bmatrix} - \vec{u}_1 - \\ - \vec{u}_2 - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_1\cdot\vec{v}_2 \\ \vec{u}_2\cdot\vec{v}_1 & \vec{u}_2\cdot\vec{v}_2 \end{bmatrix}$$

Allmänt. Om A är matrisen för avbildningen S från $\mathbb{R}^k$ till $\mathbb{R}^p$, och om B är matrisen för avbildningen T från $\mathbb{R}^p$ till $\mathbb{R}^n$ (A $p \times k$-matris, B $n \times p$-matris), så låter vi produkten BA vara matrisen för avbildningen $T \circ S$ definierad som

$$T(S(\vec{x})) = B(A\vec{x}) \quad \text{från } \mathbb{R}^k \text{ till } \mathbb{R}^n$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend left, "T \circ S"] & A\vec{x} \arrow[r, "T"] & B(A\vec{x}) \\
\mathbb{R}^k & \mathbb{R}^p & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

BA är en $n \times k$-matris:

$$n \text{ rader} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \; B \; \end{bmatrix}}_{p \text{ kolumner}} \right. \underbrace{\begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix}}_{k \text{ kolumner}} \Big\} p \text{ rader} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad BA \quad \end{bmatrix}}_{k \text{ kolumner}} \Big\} n \text{ rader}.$$

BA bara definierad om antal kolumner i B = antal rader i A.
AB bara definierad om antal kolumner i A = antal rader i B.

Om kolumnerna i A är $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$, så är

$$BA = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ B\vec{v}_1 & B\vec{v}_2 & \cdots & B\vec{v}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Exempel. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Vi får

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0+4\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3+4\cdot0 \\ 5\cdot1+6\cdot0+7\cdot0\cdot8\cdot(-2) & 5\cdot2+6\cdot1+7\cdot3+8\cdot0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 13 \\ -11 & 37 \end{bmatrix}$$

7 - 8

Räkneregler: $(AB)C = A(BC)$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

Viktigt: <u>inte</u> alltid sant att $AB = BA$

Exempel. Låt S vara spegling i x-axeln, och låt T vara rotation $\frac{\pi}{4}$ radianer moturs.

Matrisen för S: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matrisen för T: $B = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Nu är $BA = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

olika