Avsnitt 2.1 Introduktion till linjära avbildningar

Spegling och rotation (exemplen med lodjuret) är exempel på linjära avbildningar (linjära transformationer).

Avbildning = funktion

En funktion T från en mängd A till en mängd B avbildar varje α i A på ett β i B, som vi skriver

$$\beta = T(\alpha)$$

> Exempel. $\mathbb{R}^n$ betecknar mängden av alla vektorer med n positioner ($\mathbb{R}^n$ är ett vektorrum).
> Rotation $90°$ moturs avbildar vektorn $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ på vektorn $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. Vi skriver $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$.
> Notera att T går från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

Om T går från A till B säger vi att

* A är domänen för T = där vi börjar
* B är målmängden för T = där vi slutar

Ofta (men inte alltid!): $A = B$

6 - 4

T är en <u>linjär avbildning</u> (transformation) från $\mathbb{R}^k$ till $\mathbb{R}^n$ om det finns en $n \times k$-matris A så att

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

för varje k-vektor $\vec{x}$

$$\underbrace{\underset{(n \times k)}{A}\ \underset{(k \times 1)}{\vec{x}}}_{n \times 1}$$ är en n-vektor (n positioner)

Exempel. Rotation $90°$ moturs är en linjär avb. T från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, ty

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x - 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Så $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exempel. En allmän linjär avb. T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ har formen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}}_{\substack{\text{allmän} \\ 2 \times 3\text{-matris}}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{bmatrix}$$

(a, b, c, d, e, f konstanter.)

Vi <u>avbildar</u> vektorn $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ (rummet)

på vektorn $\begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ (planet).

6-5

Viktigt specialfall: <u>identitetsavbildningen</u> från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

$n=2$: $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \quad x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$n=3$ $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \quad x_2 \\ y_3 = \quad\quad x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Allmänt n: sid 45

Notation: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(och så vidare)

Dessa är <u>identitetsmatriser</u>

6-6

Inversen till en linjär avbildning

Nu: från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

Senare: från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ för allmänt n.

Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:

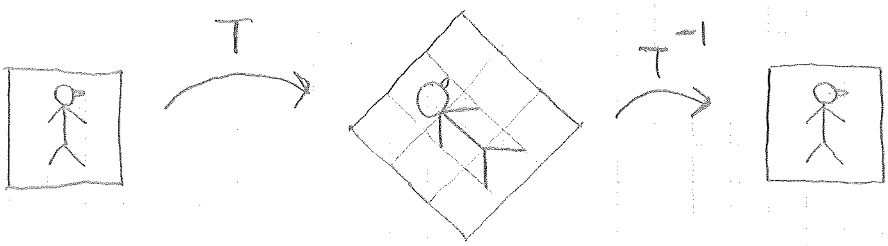
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

Inversen till T är den avbildning som "gör T baklänges".

Inversen betecknas T^{-1}

Exempel. Om T är rotation 90° moturs, så är inversen T^{-1} rotation 90° medurs

Allmänt: om $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, så $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



Obs: T^{-1} existerar inte alltid.

Exempel: $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

* Kan inte definiera $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$ då $y_2 \neq 0$, för det finns ingen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ så att $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ och $y_2 \neq 0$.

* $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ kan inte definieras entydigt, ty $T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ för varje val av t.

6 - 7

Exempel (beräkning av invers). Låt

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+3x_2\\3x_1+5x_2\end{bmatrix}$$

Exempelvis är $T\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\cdot(-1)+3\cdot 2\\3\cdot(-1)+5\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$

Vi söker nu inversen T^{-1} till T.

Exempel: $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, ty $T\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$.

Allmänt $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$: $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, där

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

Obs: $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ är <u>känd</u>. Vi söker $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$.

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc:c}2&3&y_1\\3&5&y_2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c}1&3/2&y_1/2\\3&5&y_2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c}1&3/2&y_1/2\\0&1/2&y_2-3y_1/2\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c}1&3/2&y_1/2\\0&1&2y_2-3y_1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c}1&0&y_1/2-\frac{3}{2}(2y_1-3y_2)\\0&1&2y_2-3y_1\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c}1&0&5y_1-3y_2\\0&1&-3y_1+2y_2\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5y_1-3y_2\\-3y_1+2y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-3\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

Alltså har vi att $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5&-3\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$

Inversen existerar här, för vi kan lösa ekvationen

$$\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

för <u>varje högerled</u> $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$, och lösningen är <u>entydig</u>

6-8

Avslutande exempel. Titta på en allmän 2×3-matris

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ och motsvarande avbildning T:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{bmatrix}$$

Följande gäller då:

Sätt $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi har att

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \text{kolumn 1 i } A$$

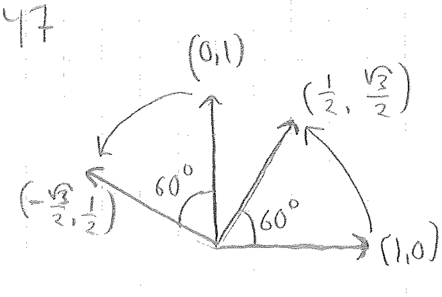
$$T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} = \text{kolumn 2 i } A$$

$$T(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \text{kolumn 3 i } A$$

Så $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & T(\vec{e}_3) \\ | & | & | \end{bmatrix}$

Allmänna $n \times k$-fallet: sid 47

Exempel. T rotation 60° moturs.



$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Så matrisen för T är $\begin{bmatrix} | & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

och $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$