5 - 1

Avsnitt 1.3: Lösningar till $\overbrace{\text{linjära ekvationssystem}}^{\text{LES}}$ + matriser

Hur många lösningar ett givet LES?

Lätt om systemet är på reducerad trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 0 = 1 \leftarrow \text{ej OK!} \end{cases}$$

Ingen lösning, ty $0 = 1$ är omöjligt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 3 \\ 0 = 0 \leftarrow \text{OK!} \end{cases}$$

En lösning, ty alla variabler är <u>ledande</u> (inga är <u>fria</u>)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad x_3 \quad\quad 3x_5 = -6 \\ x_2 - 2x_3 \quad -4x_5 = 7 \\ x_4 \quad 5x_5 = -8 \end{cases}$$

ledande: x_1, x_2, x_4

fria: x_3, x_5

Sätt $x_3 = s$, $x_5 = t$

$$\begin{cases} x_1 = -6 - s - 3t \\ x_2 = 7 + 2s + 4t \\ x_3 = s \\ x_4 = -8 - 5t \\ x_5 = t \end{cases}$$

s, t parametrar.

Oändligt många lösningar, ty det finns <u>fria</u> variabler.

5-2

Via Gauss-Jordan kan ett LES fås på reducerad trappstegsform.

<u>Slutsats</u> Ett LES har antingen

* ingen lösning } systemet är <u>inkonsistent</u>
* en enda lösning
* oändligt många lösningar } systemet är <u>konsistent</u>

LES på reducerad trappstegsform:

* ingen lösning = finns en rad på formen $[0\,0 \ldots 0 \,\vdots\, 1]$
* en enda lösning = ingen rad $[0\,0 \ldots 0 \,\vdots\, 1]$
  + inga fria variabler
* oändligt många lösningar = ingen rad $[0\,0 \ldots 0 \,\vdots\, 1]$
  + minst en fri varibel.

5-3

Rangen av en matris = antal ledande ettor i motsvarande reducerade trappstegsmatris

Exempel. Rangen av $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är 3

(3 ledande ettor)

Exempel. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \leftarrow (-1) \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rangen av $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ är därmed 2 (2 ledande ettor)

Man skriver $\text{rank}(A)$ = rangen av A.

5 - 4

<u>Koefficientmatris</u> för ett LES =
totalmatrisen minus högerledet

LES: $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5x+6y+7z=8 \end{cases}$

Totalmatris: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right]$ Koeff.-matris: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Låt A vara koeff-matrisen för ett LES. Egenskaper:

* rank$(A) \leq$ antal ekvationer
* rank$(A) \leq$ antal variabler
* <u>Om</u> rank$(A) =$ antal variabler, finns högst en lösning (inga fria variabler)
* <u>Om</u> rank$(A) <$ antal variabler, finns oändligt många <u>eller</u> inga lösningar (minst en fri variabel)

Exempel. LES med totalmatris $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 1 & 2 & -1 & b \\ 3 & 7 & 0 & c \end{array}\right]$
(forts.)

har oändligt många eller inga lösningar, ty

rank $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} = 2 <$ antal variabler.

<u>Specialfall.</u> Antal variabler = antal ekvationer = n
En enda lösning precis då rangen av koeff.-matrisen är maximal, dvs n. Motsvarande trappstegsmatris:

$\underset{n=2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{n=3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{n=4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$, ...

Lite matrisalgebra (sid 28-33)

Addition av matriser: som för vektorer.

* Matriserna måste ha samma storlek
* Komponentvis addition

Exempel.
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+r & b+s & c+t \\ d+u & e+v & f+w \end{bmatrix}$$

Skalärmultiplikation: som för vektorer.

Exempel.
$$\lambda \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{bmatrix}$$

Produkt av matris och vektor: baserad på skalärprodukt.

Exempel. $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

Skriv $\begin{cases} \vec{w}_1 = [2 \quad 9 \quad -5] \\ \vec{w}_2 = [3 \quad -6 \quad 4] \end{cases}$

Då gäller att $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} - \vec{w}_1 - \\ - \vec{w}_2 - \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \cdot \vec{x} \\ w_2 \cdot \vec{x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-7) + 9 \cdot 1 + (-5) \cdot 8 \\ 3 \cdot (-7) + (-6) \cdot 1 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 5 \end{bmatrix}$$

5 - 6

Allmänt: skriv varje rad i A som en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} - & \vec{u}_1 & - \\ - & \vec{u}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{u}_r & - \end{bmatrix}.$$

Om $\vec{v}$ har lika många <u>positioner</u> som A har <u>kolumner</u>, definiera

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{u}_r \cdot \vec{x} \end{bmatrix}$$; en vektor med lika många positioner som A har <u>rader</u>

Om $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$ och $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$, så

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_k \cdot w_k$$

Exempel.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sätt
$$\vec{w}_1 = [1 \quad 4 \quad 0 \quad 2]$$
$$\vec{w}_2 = [0 \quad -1 \quad 2 \quad 5]$$
$$\vec{w}_3 = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$$

Vi har
$$\vec{w}_1 \cdot \vec{x} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 6$$
$$\vec{w}_2 \cdot \vec{x} = 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 5$$
$$\vec{w}_3 \cdot \vec{x} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 4$$

Alltså är
$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \vec{w}_1 & - \\ - & \vec{w}_2 & - \\ - & \vec{w}_3 & - \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{w}_2 \cdot \vec{x} \\ \vec{w}_3 \cdot \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5-7 Alternativt synsätt: produkten som en <u>linjärkombination</u> av kolumnerna i A

$$\begin{bmatrix}1&4&0&2\\0&-1&2&5\\2&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}$$

$$= (\text{som ovan}) = \begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}$$

Vi uttrycker $\begin{bmatrix}6\\5\\4\end{bmatrix}$ som en <u>linjärkombination</u> av

$$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}$$

Vektorn $\vec{u}$ är en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ om det finns tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ så att

$$\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

Exempel. Uttryck $\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}$ som en linjärkomb. av $\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$.

Vill alltså hitta x och y så att

$$x\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + 2y = 5 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2\\3&2\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\3&2&5\\4&5&2\end{array}\right] \begin{array}{l} (-3)\ (-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\0&-4&8\\0&-3&6\end{array}\right] \leftarrow (-\tfrac{1}{4}) \sim \left[\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\0&1&-2\\0&-3&6\end{array}\right] \begin{array}{l} (3)\ (-2) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Svar: Vi kan skriva $\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}$

S-8

Exempel. Uttryck $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ som en linjärkomb. av $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}-5\\-10\end{bmatrix}$

Hitta alltså x och y så att

$$x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-5\\-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}1 & -5\\2 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c}1 & -5 & 1\\2 & -10 & 0\end{array}\right] \begin{matrix}\\ \leftarrow (-2)\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & -5 & 1\\0 & 0 & -2\end{array}\right] \begin{matrix}\\ \leftarrow (-\tfrac{1}{2})\end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & -5 & 1\\0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad \text{Ej lösbart!}$$

Vi kan inte skriva $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ som en linjärkomb av $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-10\end{bmatrix}$.

Notera: ett LES kan skrivas

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$\boxed{\text{koeff.-matris}}$ → A; $\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{bmatrix}$; $\vec{b}$ ← högerled

$$\begin{cases}5x+2y+3z=7\\x\qquad\quad-8z=12\end{cases} \iff \begin{bmatrix}5 & 2 & 3\\1 & 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\12\end{bmatrix}$$

Räkneregler:
$$\begin{cases}A(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}\\A(\lambda\vec{x})=\lambda(A\vec{x})\end{cases}$$