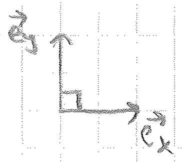
Avsnitt 1.3: Skalärprodukt

Låt $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ utgöra en ON-bas (längd 1 och ortogonala)



Kom ihåg: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ betecknar vektorn $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

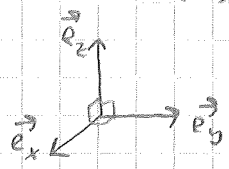
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ är koordinatvektorn.

Skalärprodukten av $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ definieras som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad \text{(en skalär = ett tal)}$$

Exempel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot(-4) + 7\cdot 1 = -12 + 7 = -5$.

Motsvarande i rummet: låt $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ vara en ON-bas i rummet



Vi skriver $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Skalärprodukt i rummet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Exempel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 3\cdot(-4) + 7\cdot 1 + (-2)\cdot(-5)$
$= -12 + 7 + 10 = 5$

2-②

Räkneregler: $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$ $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 \right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

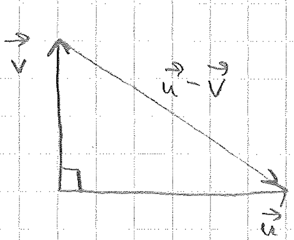
Inte svåra att bevisa.

Exempel. Vi har att

$$\begin{aligned} |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

Viktigt: Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala, så gäller

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$



Pythagoras' sats ger nämligen att

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

Exemplet: $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Slutsats: $2\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

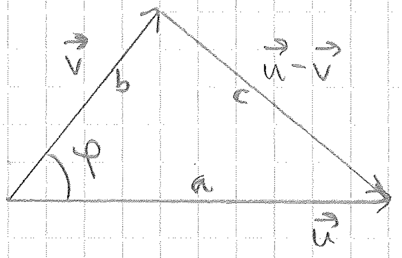
2-3

Allmänt. Låt φ vara vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$. $(0 \le \varphi \le \pi)$

Då är

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\varphi \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Bevis. Cosinussatsen ger att



$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\cos\varphi\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

$$(\; c^2 = a^2 + b^2 - 2\cos\varphi\; ab)$$

Men vi vet ju att

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Alltså är

$$\underline{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} - 2\cos\varphi\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \underline{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\cos\varphi\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = -2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \vec{u}\cdot\vec{v}.$$

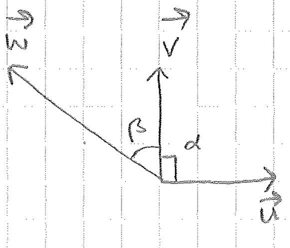
Observationer:

$0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi > 0$, dvs $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ (spetsig)

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0$, dvs $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (rät)

$\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \Rightarrow \cos\varphi < 0$, dvs $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ (trubbig)

Exempel.



$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (α är rät)

$\vec{v}\cdot\vec{w} > 0$ (β är spetsig)

$\vec{u}\cdot\vec{w} < 0$ ($\alpha+\beta$ är trubbig)

2-4

Exempel. Låt φ vara vinkeln mellan $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Beräkna φ.

Lösning. Vi använder formeln $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\varphi \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

Notera att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)$$

$$= -6 + 2 - 3 = -7$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

Alltså är $-7 = \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\varphi\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \cos\varphi \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{14}$

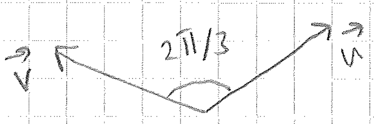
$$= 14 \cos\varphi$$

Men $-7 = 14\cos\varphi \iff -\frac{7}{14} = \cos\varphi \iff \cos\varphi = -\frac{1}{2}$

Vi vet att $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ och $\cos(\pi - x) = -\cos x$, så

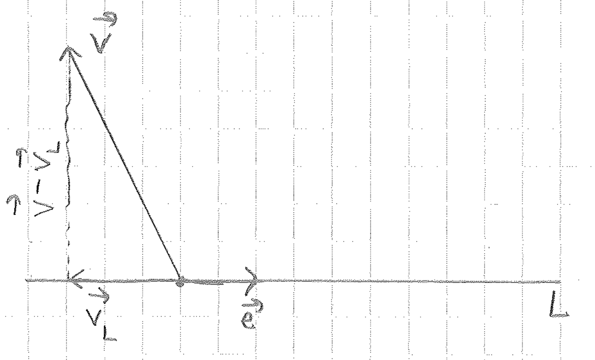
$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Alltså är $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$



2-5

Sats 1.4 (Projektionssatsen)



Låt $\vec{e}$ vara en enhetsvektor ($|\vec{e}|=1$) parallell med linjen L. Då har vi formeln

$$\vec{v}_L = \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{e})}_{\text{skalär}}\vec{e}$$

där $\vec{v}_L$ är den ortogonala projektionen på L.

Exempel. Låt $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ och $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
Låt L vara linjen med riktningsvektor $\vec{u}$. Beräkna $\vec{v}_L$.

Lösning. En enhetsvektor $\vec{e}$ parallell med $\vec{u}$ ges av

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

Sats 1.4 ger att
$$\vec{v}_L = (\vec{v}\cdot\vec{e})\cdot\vec{e} = \left(\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$$
$$= \left((-2)\cdot\frac{3}{5}+(-1)\cdot\frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$$
$$= \left(-\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

Bevis av Sats 1.4. $\vec{v}_L$ och $\vec{e}$ är parallella, så $\vec{v}_L = t\vec{e}$ för något t. $\vec{v}-\vec{v}_L$ är ortogonal mot $\vec{e}$, så

$$0 = (\vec{v}-\vec{v}_L)\cdot\vec{e} = \vec{v}\cdot\vec{e}-\vec{v}_L\cdot\vec{e} = \vec{v}\cdot\vec{e}-t\vec{e}\cdot\vec{e}$$
$$= \vec{v}\cdot\vec{e} - t\cdot\underbrace{|\vec{e}|^2}_{=1} = \vec{v}\cdot\vec{e}-t \implies 0 = \vec{v}\cdot\vec{e}-t$$

$$\iff t = \vec{v}\cdot\vec{e}.$$

2-6

Avsnitt 1.4: Vektorprodukter

Inledande motivering. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ vara två icke-parallella vektorer i rummet.

Vanligt problem: hitta en vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ så att $\vec{w}$ är ortogonal mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \iff a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

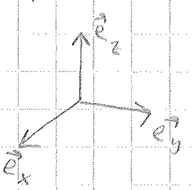
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

Vektorprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ ger en sådan vektor $\vec{w}$.

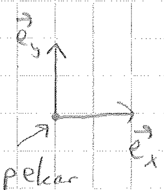
För att förstå definitionen behöver vi några begrepp.

En trippel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ är <u>högerorienterad</u> om följande gäller:

Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ritas i planet med $\vec{v}$ rakt uppåt och $\vec{u}$ till <u>höger</u>, så pekar $\vec{w}$ <u>utåt</u> (inte inåt).



$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ Högerorienterat:



$\vec{e}_z$ pekar <u>ut</u> från pappret (tavlan)

<u>Högerorienterade</u>	<u>Vänsterorienterade</u>
$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	$(\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_y)$
$(\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$	$(\vec{e}_y, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$
$(\vec{e}_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$	$(\vec{e}_z, \vec{e}_y, \vec{e}_x)$

Vi definierar $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ så att $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ är högerorienterad.

Exempel:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

2-7 Vill kunna räkna med vektorprodukten:

$$(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) \qquad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

Detta ger följande:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = (a_1 \vec{e}_x + b_1 \vec{e}_y + c_1 \vec{e}_z) \times (a_2 \vec{e}_x + b_2 \vec{e}_y + c_2 \vec{e}_z)$$

$$= [\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0} \text{ osv}] = a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} + a_1 c_2 \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{-\vec{e}_y} + b_1 a_2 \underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{-\vec{e}_z}$$

$$+ b_1 c_2 \vec{e}_y \times \vec{e}_z + c_1 a_2 \vec{e}_z \times \vec{e}_x + c_1 b_2 \vec{e}_z \times \vec{e}_y$$

$$= a_1 b_2 \vec{e}_z - a_1 c_2 \vec{e}_y - b_1 a_2 \vec{e}_z + b_1 c_2 \vec{e}_x + c_1 a_2 \vec{e}_y - c_1 b_2 \vec{e}_x$$

$$= \boxed{(b_1 c_2 - c_1 b_2)\vec{e}_x + (c_1 a_2 - a_1 c_2)\vec{e}_y + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec{e}_z}$$

Minnesregel (Sarrus' regel):

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & \vec{e}_x & - \\ b_1 & b_2 & \vec{e}_y & - \\ c_1 & c_2 & \vec{e}_z & - \\ a_1 & a_2 & \vec{e}_x & + \\ b_1 & b_2 & \vec{e}_y & + \\ & & & + \end{array}$$

Exempel $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & \vec{e}_x \\ 2 & 6 & \vec{e}_y \\ 4 & 5 & \vec{e}_z \\ \hline 1 & 3 & \vec{e}_x \\ 2 & 6 & \vec{e}_y \end{array} \qquad \begin{array}{l} -4\cdot 6\,\vec{e}_x \\ -1\cdot 5\,\vec{e}_y \\ -2\cdot 3\,\vec{e}_z \\ +1\cdot 6\,\vec{e}_z \\ +2\cdot 5\,\vec{e}_x \\ +4\cdot 3\,\vec{e}_y \end{array}$$

Alltså: $\vec{u} \times \vec{v} = (2\cdot 5 - 4\cdot 6)\vec{e}_x + (4\cdot 3 - 1\cdot 5)\vec{e}_y$

$$+ (1\cdot 6 - 2\cdot 3)\vec{e}_z = -14\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 0\cdot\vec{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2-8

Notation. Vi skriver $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$ (en så kallad <u>determinant</u>)

Detta ger att $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \vec{e}_x + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_z$

Vi har att $\vec{u} \times \vec{v}$ är ortogonal mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$, dvs

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ och $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

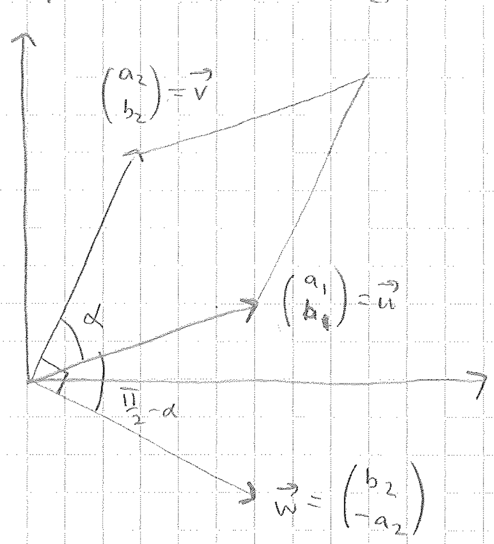
I vårt exempel såg vi att $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, och

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = -14 + 14 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = -42 + 42 = 0.$$

2-9

Geometrisk tolkning av determinanten $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$:

Arean av parallellogrammen som spänns upp av $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ är lika med $|a_1b_2 - a_2b_1|$



Härledning. Areasatsen ger att

arean $= \sin\alpha \, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

(α som i figuren).

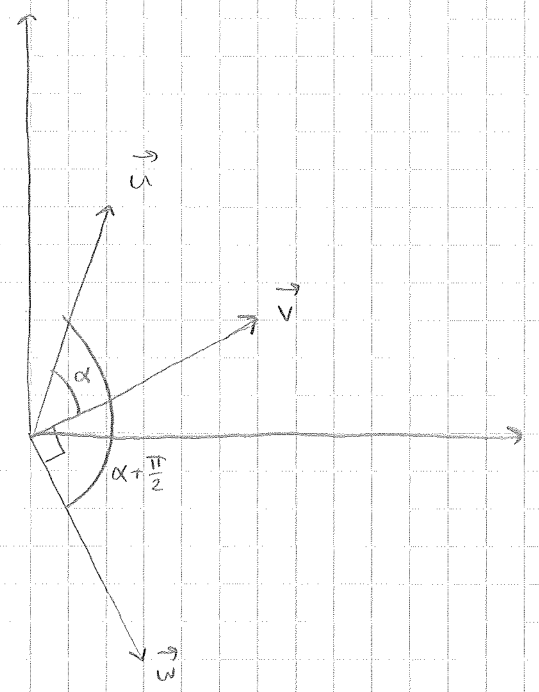
Notera nu att

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \vec{u} \cdot \vec{w},$$

där $\vec{w} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$,

så $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är ortogonala.

Vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{w}$ är $\frac{\pi}{2} - \alpha$ eller $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (se figurer)

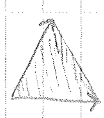


Vi ser att $a_1b_2 - a_2b_1$ är lika med

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \\ &= \pm \sin\alpha \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \\ &= \pm \sin\alpha \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \\ &= \pm \text{ arean} \end{aligned}$$

Alltså: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm \text{arean ovan} \end{pmatrix}$

Allmänt: $|\vec{u} \times \vec{v}|$ = arean av parallellogrammen som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

(= 2 · arean av motsvarande triangel: )

2-10

Trippelprodukt: $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

Faktum: $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \pm$ volymen av parallellepipeden uppspänd av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (+ om $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ högerorienterad)

Exempel. $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 5\end{vmatrix}\vec{e}_x + \begin{vmatrix}2 & 5\\0 & 3\end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix}0 & 3\\1 & 4\end{vmatrix}\vec{e}_z = -3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 3\vec{e}_z$$

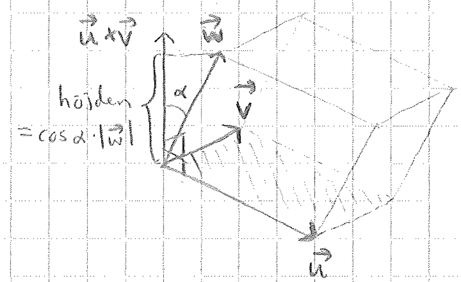
$$= \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix} = -3\cdot 6 + 6\cdot 7 = 24 = \text{volym av parallellepiped.}$$

Kontroll att $\vec{u}\times\vec{v}$ är korrekt:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = 0 + \overbrace{1\cdot 6}^{6} + \overbrace{2\cdot(-3)}^{-6} = 0$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = \overbrace{3\cdot(-3)}^{-9} + \overbrace{4\cdot 6}^{24} + \overbrace{5\cdot(-3)}^{-15} = 0$$



$$\text{Volymen} = |\vec{u}\times\vec{v}|\cdot\cos\alpha\cdot|\vec{w}|$$
$$= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}.$$