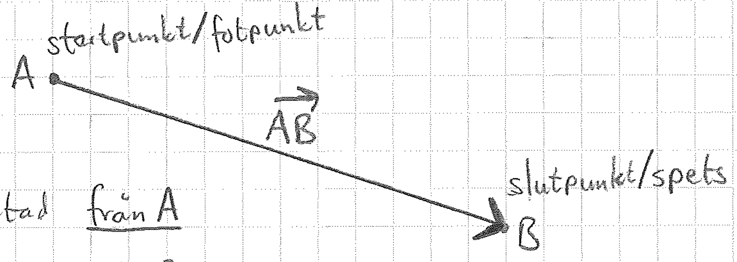
1-(1) 30/8

Avsnitt 1.1 i Särtryck: Vektorer

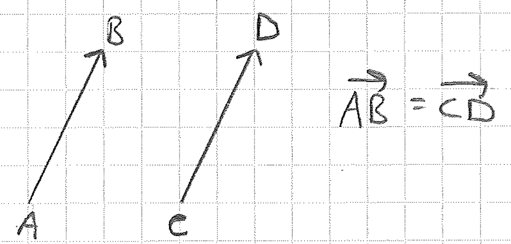
En <u>vektor</u> är ett riktat linjesegment (säg i planet eller rummet)



Riktad <u>från A</u>

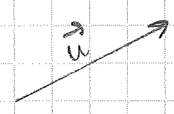
och <u>till B</u>.

Vektorer med samma längd och riktning betraktar vi som identiska.



Vi betecknar ofta vektorer med boktäver: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$

Fördel: slipper ange start- och slutpunkt.



Längden av vektorn $\vec{v}$ skriver vi som $|\vec{v}|$

Alltså: $|\overrightarrow{AB}|$ = längden av $\overrightarrow{AB}$ = avståndet mellan A och B.

(Enhet antas vara fixerad.)

Nollvektorn $\vec{0}$ har längd 0 och saknar riktning.

1-2

Skalärmultiplikation med vektor (definition 1.1).

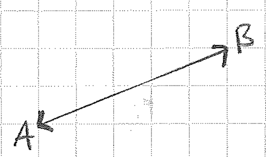
Skalär = reellt tal.

Om $\lambda > 0$, låt $\lambda\vec{v}$ vara vektorn med samma riktning som $\vec{v}$ och längd $\lambda \cdot |\vec{v}|$ = λ gånger längden av $\vec{v}$

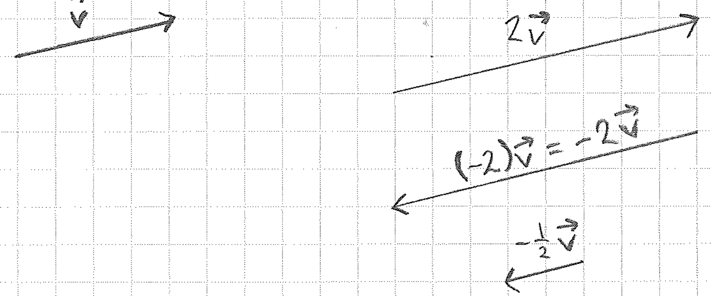
Om $\lambda = 0$, låt $\lambda\vec{v} = 0\cdot\vec{v} = \vec{0}$ = nollvektorn

Om $\lambda < 0$, låt $\lambda\vec{v}$ vara vektorn med <u>motsatt</u> riktning och längd $|\lambda|\cdot|\vec{v}| = (-\lambda)\,|\vec{v}|$

Vi skriver $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$. Observera: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



Exempel.



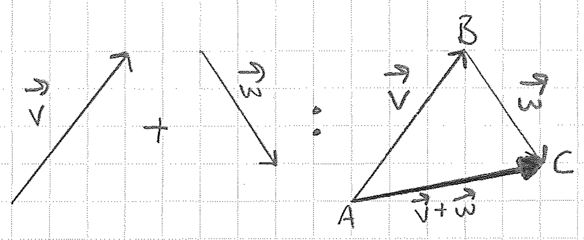
Vektorer med samma eller motsatt riktning är <u>parallella</u>.

Nollvektorn $\vec{0}$ är parallell med alla vektorer.

För varje skalär λ gäller att $\lambda\vec{v}$ och $\vec{v}$ är parallella

1-3

Addition av vektorer.
(definition 1.2)

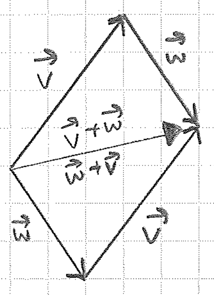


Så: $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

(spetsen till $\vec v$ vid fotpunkten till $\vec w$)

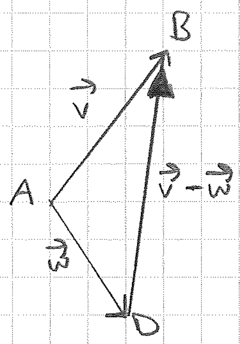
Vi har att

$\vec v+\vec w=\vec w+\vec v$:



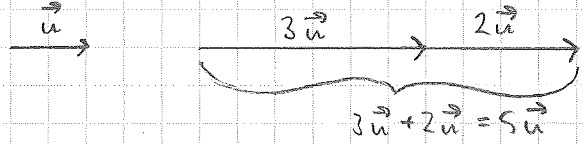
Subtraktion: $\vec v-\vec w=\vec v+(-\vec w)$

$\vec{AB}-\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{DA}=\vec{DB}$

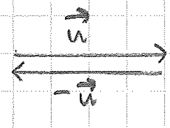


Räkneregler: sid 12

Exempel: $(\lambda+\mu)\vec u=\lambda\vec u+\mu\vec u$



$\vec u+(-\vec u)=\vec u-\vec u=\vec 0$

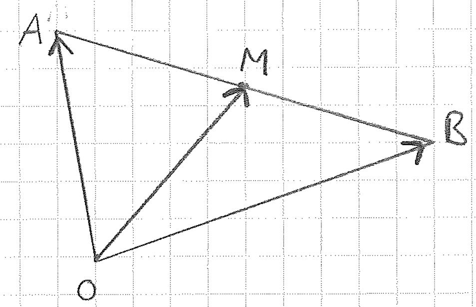


1-4

Nu ska vi räkna! Praktiskt att införa fix referenspunkt O (origo)

$\vec{OA}$ = ortsvektorn för punkten A. Nollvektorn = ortsvektorn för O.

Exempel 1.5.



M = mittpunkten på sträckan mellan A och B, dvs

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{MB}$$

Ortsvektorn för M är

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA})$$

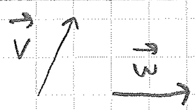
$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

Vad har vi gjort?

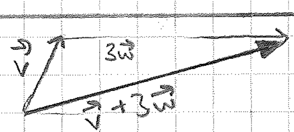
Svar: Uttryckt $\vec{OM}$ som en kombination av $\vec{OA}$ och $\vec{OB}$.

Man kallar ett uttryck på formen $a\vec{v} + b\vec{w}$ för en linjärkombination. Här är a och b skalärer (tal).

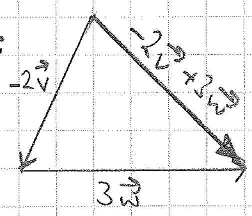
Exempel.



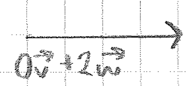
$\boxed{\vec{v} + 3\vec{w}}$:



$\boxed{-2\vec{v} + 3\vec{w}}$:



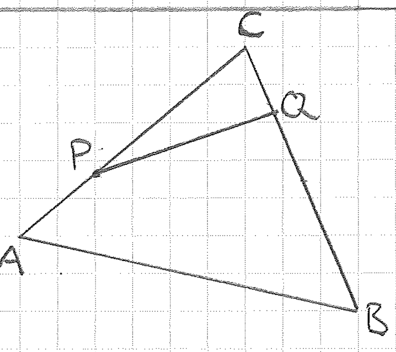
$\boxed{0\vec{v} + 2\vec{w} = 2\vec{w}}$:



Mycket viktigt begrepp!

Senare: linjärkomb av fler än två vektorer

Exempel (variant på exempel 1.6)



Notation som i figuren

Antag att vi vet:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \end{cases}$$

(exakt som i 1.6)

Uttryck $\overrightarrow{PQ}$ som en linjärkombination av $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BC}$ (inte som i 1.6)

Lösning. Vi vill skriva $\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{BC}$

Nu är $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}$

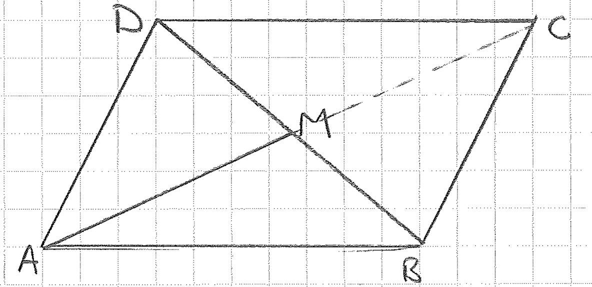
$$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BC})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$= (\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}) + (\tfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC})$$

$$= \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} + (-\tfrac{1}{4})\overrightarrow{BC} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Exempel 1.7



I parallellogrammen ABCD gäller att mittpunkten M mellan B och D uppfyller $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Visa detta!

Lösning. Vi har att $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ (som i exempel 1.5)

$$= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

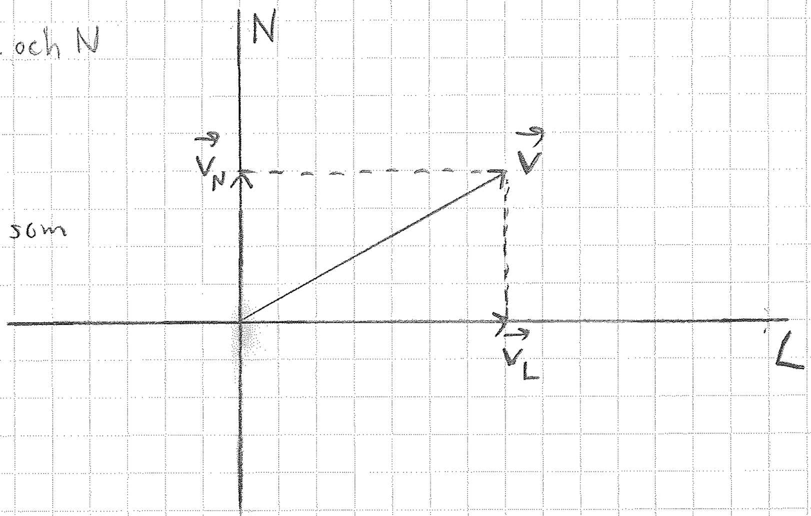
Detta innebär att diagonalerna skär varandra i varandras mittpunkter.

1-6

Avsnitt 1.2: Projektion och koordinater

Två vinkelräta linjer L och N i planet.

En vektor $\vec{v}$ kan på ett unikt sätt skrivas som



$\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_N$,

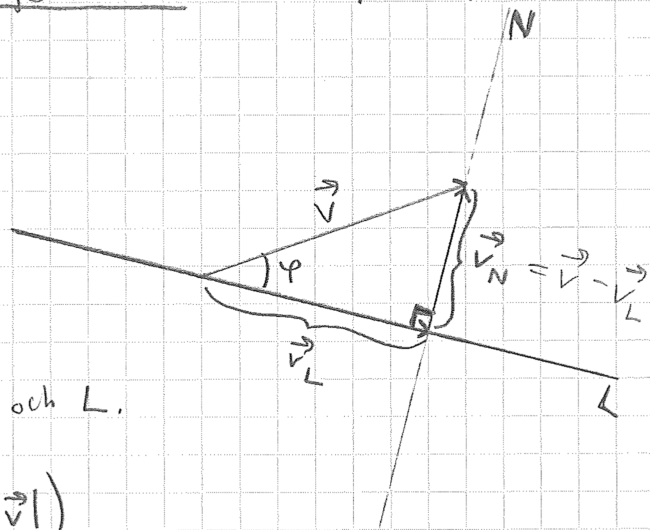
där

$\vec{v}_L$ är parallell med L

$\vec{v}_N$ är parallell med N, dvs vinkelrät mot L. Observera att $\vec{v}_N = \vec{v} - \vec{v}_L$

$\vec{v}_L$ är den ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på L.

För $\vec{v} = 0$ sätter vi $\vec{v}_L = \vec{0}$.



Viktig formel:

$$\boxed{|\vec{v}_L| = \cos\varphi \cdot |\vec{v}|}$$

φ = spetsiga vinkeln mellan $\vec{v}$ och L.

(Mindre viktig: $|\vec{v}_N| = \sin\varphi \cdot |\vec{v}|$)

1 – 7

Fixera vektorer $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$, där $\begin{cases} \vec{e}_x \text{ är parallell med } L \\ \vec{e}_y \text{ är parallell med } N \end{cases}$

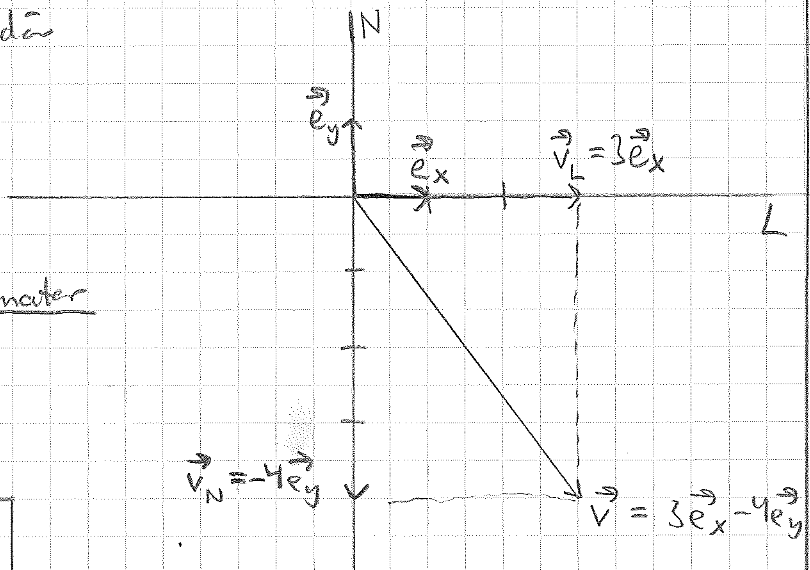
och där $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$

Given en uppdelning $\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_N$, låt x och y vara sådana att $\vec{v}_L = x\vec{e}_x$ och $\vec{v}_N = y\vec{e}_y$

Exempel. $\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_N$, där

$$\begin{cases} \vec{v}_L = 3\vec{e}_x \\ \vec{v}_N = -4\vec{e}_y \end{cases}$$

3 och −4 är $\vec{v}$:s <u>koordinater</u> i <u>basen</u> $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$



Allmännare:

Om $\vec{v} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, så är

x och y $\vec{v}$:s koordinater i basen (e_x, e_y)

Notation: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (förutsatt att $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$ är fixerade)

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ är en <u>ON-bas</u>

ON = ortonormerade = ortogonala (vinkelräta)
+
normerade (längd 1)

Viktigt begrepp!

Räkneregler:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

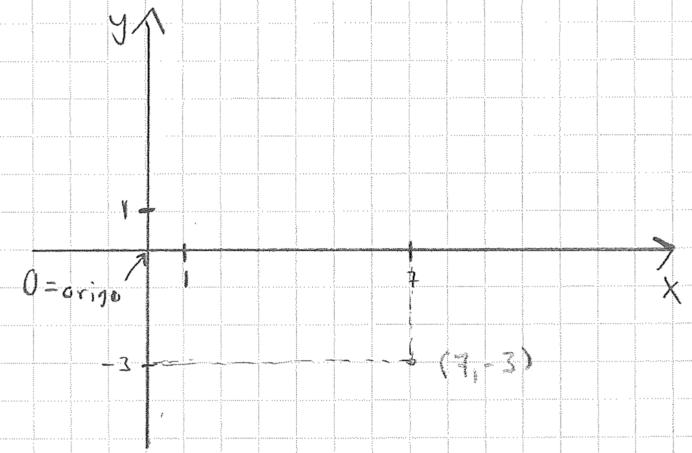
$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

1-8

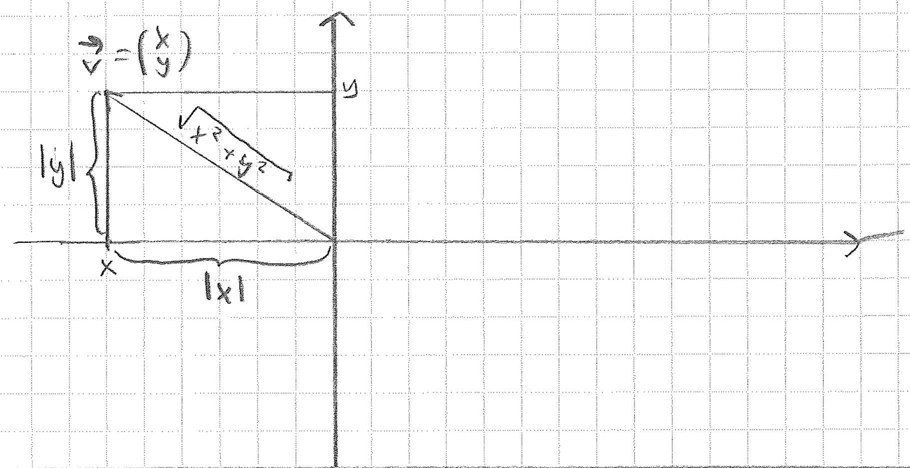
Spetsen P för ortsvektorn $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ betecknas (x, y)

ON-system = ortonormerat koordinatsystem

x-axel och y-axel



Längden av vektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ är $\sqrt{x^2 + y^2}$



Exempel. Längden av vektorn $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ är $\sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

Enhetsvektor = vektor av längd 1 (dvs $\sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$)

Om $\vec{v}$ är nollskild, så är $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ en enhetsvektor:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ger $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Exempel: $\frac{1}{\sqrt{52}}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en enhetsvektor

1 - 9

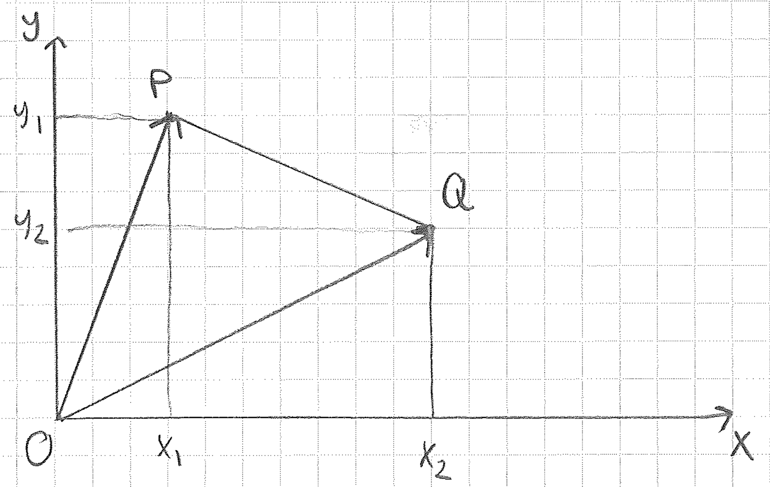
Avståndsformel i planet.

Om $P = (x_1, y_1)$ och $Q = (x_2, y_2)$, så är avståndet mellan P och Q lika med

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

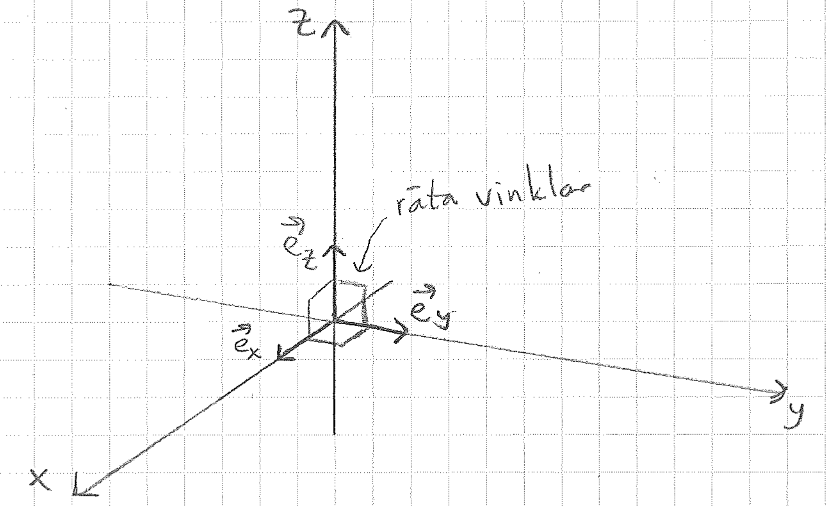
Hur ser vi att $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$?

Jo, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$



1 – 10

ON-system i rummet: x-axel, y-axel och z-axel



Låt $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ vara enhetsvektorer i koordinataxlarnas riktning.

Varje vektor i rummet kan skrivas

$$\vec{v} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Vi skriver $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Samma räkneregler! (sid 25)

Avståndsformel: $P = (x_1, y_1, z_1)$ $Q = (x_2, y_2, z_2)$

Avståndet $= |\vec{PQ}| = |\vec{OQ} - \vec{OP}| = \left| \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \right|$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

(Längden av vektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$