ÖVNINGSTENTA DISKRET MATEMATIK FÖR IT2 ht10

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Hjälpmedel Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Bestäm den minsta positiva resten som erhålls när talet 53^{36} delas med talet 37.

2. (3p) Bestäm antalet binära ord av längd 15 som innehåller precis 3 stycket ettor. Svaret skall ges i formen av ett heltal.

3. (3p) Gruppen $(Z_{20}, +)$ har ett antal delgrupper och en samling av olika sidoklasser till dessa delgrupper. En av dessa sidoklasser innehåller precis fem element varav elementet 3 är ett av dessa fem element. Ange samtliga element i denna sidoklass.

4. (3p) Den e-felsrättande koden C har kontrollmatrisen (eng: (parity) check matrix)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm e. (**OBS:** Glöm ej att ge en kortfattad motivering!)

   (b) Bestäm ett ord $\bar{c} \in C$ sådant att $\bar{c} \neq \bar{0}$.

   (c) Går ordet 111001 att rätta.

5. (3p) Den planära sammanhängande grafen G har nio noder varav en har valensen (degree) två, en har valensen tre, en har valensen fem och resterande sex noder har valensen fyra. Bestäm antalet områden som uppstår när grafen ritas plant.

DEL II

6. (3p) Visa att $4^n - 3n - 1$ är delbart med talet 9 för alla naturliga tal $n \geq 2$.

7. (5p) Man skall utse precis nio personer ur de tre mängderna $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_6\}, \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_6\}$ och $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$. (Mängderna är disjunkta så ingen person finns med i fler än i en av mängderna $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.) På hur många sätt kan detta ske om

   (a) (1p) Inga restriktioner finns.

   (b) (2p) Minst en person från varje mängd skall finnas med i urvalet.

   (c) (2p) Precis tre personer från varje mängd skall ingå och högst en person från mängden $\{A_1, B_1, C_1\}$ får finnas med bland de nio utvalda personerna.

8. (4p) Låt $\mathcal{S}_5$ beteckna mängden av permutationer på en mängd med fem element. Bestäm en delgrupp till $\mathcal{S}_5$ med 12 element.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i beviset.

9. En felkorrigerande kod C säges vara linjär om för varja par av ord c och c' som finns i C också deras skillnad $c - c'$ tillhör C. Till varje linjär kod C finns en kontrollmatris H sådan att $C = \{c \mid Hc^T = 0\}$ och omvänt är är varje kod som definieras på detta sätt med hjälp av en kontrollmatris en linjär kod. (Detta är information inför upppgifterna (a) och (b) nedan och du behöver inte visa att denna information är sann.)

   (a) (2p) Visa att det inte finns någon 1-felsrättande linjär kod C med 32 ord och som innehåller de tre orden
   $$c_1 = 111100000, \quad c_2 = 011001100, \quad c_3 = 100101010.$$

   (b) (2p) Undersök om en sådan kod C kan finnas om bara två av de tre givna orden ovan skall finnas med bland de 32 orden i C.

10. För grupper G_1 och G_2 med gruppoperationerna $\circ_1$ respektive $\circ_2$ så definieras den direkta produkten av dessa grupper som mängden
   $$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2\}$$
   med gruppoperationen $\circ$ definierad av
   $$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ_1 h_1, g_2 \circ_2 h_2).$$

   (a) (2p) Under vilka förutsättningar gäller att om $G_1 \times G_2$ är en ändlig cyklisk grupp så är både G_1 och G_2 cykliska grupper.

   (b) (3p) Under vilka förutsättningar gäller att om G_1 och G_2 är ändliga cykliska grupper så är $G_1 \times G_2$ en cyklisk grupp.

   OBS: För full poäng krävs givetvis korrekta bevis och motiveringar.