Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några av övningar till den 24 september 2010 till kursen Diskret Matematik SF1610 för CINTE.

5. Visa att om H och K båda är delgrupper till en grupp G så kommer också $H \cap K$ att vara en delgrupp till G.

Lösning: 1) Vi visar att $H \cap K$ är sluten: Antag a och b är godtyckliga element som tillhör både H och K, dvs

$$a, b \in H \cap K \ .$$

Eftersom H är en grupp och $a, b \in H$ så kommer ab också att tillhöra H (eftersom H är sluten). På samma sätt inses att ab tillhör K. Vi har nu visat att ab tillhör både H och K, dvs

$$ab \in H \cap K \ ,$$

med andar ord att $H \cap K$ är sluten.

2) Nu visar vi att associativa räknelagen gäller i $H \cap K$: Tag $a, b, c \in H \cap K$ godtyckligt. Då gäller att $a, b, c \in G$ och i G gäller associativa räknelagen:

$$(ab)c = a(bc) \ .$$

Alltså i $H \cap K$ har vi att $(ab)c = a(bc)$.

3) Vi viasr att identiteten i G också tillhör $H \cap K$: Eftersom H och K bägger är delgrupper till G så gäller att G:s identitet e tillhör både H och K, dvs

$$e \in H \cap K \ .$$

4) Vi visar att om $a \in H \cap K$ så kommer a:s invers i G att tillhöra $H \cap K$: Eftersom $a \in H$ och H är en delgrupp till G så kommer a:s invers att tillhöra H. På samma sätt inses att a;s invers tillhör K. Vi har nu visat att a:s invers tillhör både H och K.

Slutsats: Eftersom vi lyckats verifiera egenskaperna 1), ..., 4) för delmängden $H \cap K$ till G så är $H \cap K$ en grupp och därmed också en delgrupp till G.

6. Som ovan, men nu gäller att G är cyklisk med 36 element. Hur många element har $H \cap K$ om
   a) $|H| = 9$ och $|K| = 4$.
   b) $|H| = 9$ och $|K| = 6$.

Lösning: a) $H \cap K$ är också en delgrupp till både H och K, eftersom $H \cap K$ är en grupp samt en delmängd till dessa bägge grupper. Enligt Lagranges sats så gäller att $|H \cap K|$ delar talen $|H| = 9$ och $|K| = 4$, och enda möjligheten är att $|H \cap K| = 1$.

b) Som i uppgifta a) får vi två möjligheter:

$$|H \cap K| = 1 \qquad \text{eller} \qquad |H \cap K| = 6 \ .$$

Genom följande kanske komplicerade resonemang kan vi nu utesluta att $H \cap K| = 1$:

Antag att $H \cap K| = 1$.

Låt $H = \{a_1 = e, a_2, \ldots, a_9\}$ och $K = \{b_1 = e, b_2, \ldots, b_6\}$ där åtminstone elementet e tillhör båda mängderna. Vi bildar nu mängden

$$L = \{ \ a_i b_j \ \mid \ a_i \in H, \quad b_j \in K \ \} \ .$$

Alla element i L finns i G eftersom G är sluten och elementen a_i och b_j tillhör G. Antag nu att

$$a_i b_j = a_{i'} b_{j'} \; .$$

Då får vi att

$$a_{i'}^{-1} a_i = b_{j'} b_j^{-1} \; ,$$

men elementet på vänstar sidan tillhör H och elementet på högra sidan tillhör K, och eftersom elementen är lika och vi antagit att $H \cap K = \{e\}$ så måste

$$a_{i'}^{-1} a_i = e \qquad \text{och} \qquad b_{j'} b_j^{-1} = e \; .$$

Eller fórenklat

$$a_i = a_{i'} \qquad \text{och} \qquad b_j = b_{j'} \; .$$

Som konsekvens av detta uppträder inga duplikationer i L, dvs

$$(i,j) \neq (i',j') \qquad \Longrightarrow \qquad a_i b_j \neq a_{i'} b_{j'} \; .$$

L består då av $9 \cdot 6 = 54$ olika element som samtliga tillhör G, vilket är en orimlighet då $|G| = 36$.

Antagandet $|H \cap K| = 1$ leder alltså till en orimlighet och enda möjligheten är att $|H \cap K| = 3$.