Matematiska Institutionen, KTH

Lösning till tentamensskrivning i Linjär algebra komplettering, SF1605, den 5 juni 2010, kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Problem:

1. (3p) Betrakta vektorrummet R^5. Visa att vektorerna $\bar{a}_1 = (1,1,2,1,0)$, $\bar{a}_2 = (0,1,1,2,-1)$ och $\bar{a}_3 = (1,0,2,-1,1)$ är linjärt oberoende samt bestäm sedan vektorer $\bar{a}_4$ och $\bar{a}_5$ så att de tillsammans med de tre givna vektorerna bildar en bas för R^5.

   Lösning: Vi placerar de givna vektorerna som kolonner i en matris, samt tillfogar de fem vektorena i stadardbasen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   Vi utför sedan elementära radoperationer för att få matrisen på en radkanonisk form:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   varur framgår att de första fem kolonnerna i matrisen är linjärt oberoende, och då gäller detta också för orginalmatrisen. Så

   SVAR: De tre givna kompletterade med $(1,0,0,0,0)$ och $(0,1,0,0,0)$.

2. (3p) Bestäm samtliga reella tal a, b, c, d och e som gör nedanstående matris till en ortogonalmatris:
$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

Lösning: En matris är en ortogonalmatris om kolonnerna, resp raderna, utgör en ON-bas. Utnyttjar vi att längder av kolonner och rader skall vara 1, får vi omedelbart

$$a = 0, \quad b = \pm\sqrt{2/3}, \quad c = \pm\sqrt{1/3}, \quad d = \pm\sqrt{1/3}, \quad e = \pm\sqrt{1/3}\ .$$

Nu måste plus och minustecken anpassas så att kolonnerna, resp raderna blir vinkelräta mot varandra, dvs deras respektive inbördes skalära produkter skall vara lika med noll. Vi finner då följande möjligheter

$$\begin{aligned}
(a,b,c,d,e) &= (0, \sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) \\
(a,b,c,d,e) &= (0, \sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) \\
(a,b,c,d,e) &= (0, -\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) \\
(a,b,c,d,e) &= (0, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3})
\end{aligned}$$

3. (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att talen i talföljden $a_n = 4^n + 2(-2)^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots,$ satisfierar rekursionsekvationen

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} \qquad n = 2, 3, \ldots\ ,$$

med $a_0 = 3$ och $a_1 = 0$.

Lösning: Den givna lösningen satisfierar begynnelsevärdena i rekursionsekvationen eftersom

$$4^0 + 2(-2)^0 = 3 \qquad \text{och} \qquad 4^1 + 2(-2)^1 = 0\ .$$

Antag nu att för en lösning a_n till rekursionsekvationen vi har visat att för alla $k \leq n$ så gäller $a_k = 4^k + 2(-2)^k$. Vi visar att då gäller denna formel också för en lösning när $k = n + 1$.

Vi finner att

$$a_{n+1} = 2a_n + 8_{n-1} = 2(4^n + 2(-2)^n) + 8(4^{n-1} + 2(-2)^{n-1}) = 16 \cdot 4^{n-1} + 8(-2)^{n-1}$$

som ju kan omformas till

$$a_{n+1} = 4^{n+1} + 2(-2)(-2)(-2)^{n-1} = 4^{n+1} + 2(-2)^{n+1}\ .$$

Så under det givna induktionsantagandet gäller formeln när $k = n + 1$.

Enligt induktionsprincipen gäller nu formeln för alla naturliga tal n.

4. Matriserna i denna uppgift är samtliga kvadratiska $n \times n$-matriser.

   (a) (2p) Visa att om matrisen $\mathbf{B}$ har full rang, dvs rangen för matrisen $\mathbf{B}$ är n, så gäller för varje annan matris $\mathbf{A}$ att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har samma rang.

   Lösning Nollrummet till matrisen $\mathbf{AB}$ består av de vektorer $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$ sådana att $\mathbf{B}\bar{x}^T$ tillhör nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Om $\mathbf{B}$ har full rang kommer nollrummet till $\mathbf{AB}$ då att ha samma dimension som nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Enligt dimensionssatsen så har då matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{AB}$ att ha samma rang.

   Kolonnrummet till matrisen $\mathbf{BA}$ består av vektorerna $\mathbf{B}\bar{y}^T$ där $\bar{y}$ tillhör kolonnrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Eftersom $\mathbf{B}$ har full rang, och inte "släcker ut några dimensioner" kommer dimensionen av kolonnrummet till matrisen $\mathbf{BA}$ att vara lika med dimensionen hos kolonnrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Enligt dimensionssatsen har då matriserna $\mathbf{BA}$ och $\mathbf{A}$ samma rang.

   Eftersom tydligen matriserna $\mathbf{BA}$ och $\mathbf{AB}$ har samma rang som matrisen $\mathbf{A}$ måste alla dessa ranger vara lika.

(b) (1p) Bestäm två 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har olika rang.

Lösning Låt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Då gäller

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som har rang 1, och

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

som har rangen 2.

5. (3p) Med hjälp av kunskaper från gymnasiets kurser Matematik A, B, C och D samt de verktyg du har fått med dig från kursen i Linjär algebra, skall du bestämma de reella tal a och b som gör värdet av integralen nedan så litet som möjligt:

$$\int_0^1 (t^3 - a - bt)^2 \mathrm{dt} \ .$$

Lösning: Vi betraktar vektorrummet av funktioner kontinuerliga på intervallet 0 till 1, med den inre produkten

$$< f \mid g >= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{dt} \ .$$

Med

$$||f||^2 =< f \mid f >= \int_0^1 f(t)^2 \mathrm{dt} \ ,$$

har vi alltså till uppgift att bestämma a och b så att $||t^3 - (a + bt)||$ blir så liten som möjligt, vilket inträffar när $a + bt$ är projektionen av t^3 på $L = \mathrm{span}\{\ 1, t\ \}$. Vi söker alltså denna projektion.

Betsämmer först en ortogonalbas för L. Låter vi $\bar{e}_1 = 1$ och

$$\bar{e}_2 = t - \mathrm{Proj}_{\bar{e}_1}(t) = t - \frac{< t \mid 1 >}{< 1 \mid 1 >} 1 = t - \frac{\int_0^1 t \cdot 1\mathrm{dt}}{\int_0^1 1 \cdot 1\mathrm{dt}} 1 = t - \frac{1/2}{1} 1 = t - \frac{1}{2} \ .$$

Nu har vi en ortogonalbas för L och finner enligt känd formel

$$\mathrm{Proj}_L(t^3) = \frac{< t^3 \mid \bar{e}_1 >}{< \bar{e}_1 \mid \bar{e}_1 >}\bar{e}_1 + \frac{< t^3 \mid \bar{e}_2 >}{< \bar{e}_2 \mid \bar{e}_2 >}\bar{e}_2 = \frac{\int_0^1 t^3 \cdot 1\mathrm{dt}}{\int_0^1 1 \cdot 1\mathrm{dt}} \cdot 1 + \frac{\int_0^1 t^3 \cdot (t - 1/2)\mathrm{dt}}{\int_0^1 (t - 1/2) \cdot (t - 1/2)\mathrm{dt}} (t - 1/2)$$

Vanlig integration av polynom ger nu

$$\mathrm{Proj}_L(t^3) = \frac{1/4}{1} \cdot 1 + \frac{1/5 - 1/8}{1/3 - 1/4 + 1/4}(t - 1/2) = \frac{1}{4} + \frac{9}{40}(t - 1/2) = \frac{11}{80} + \frac{9}{40}t \ .$$

SVAR: $a = 11/80$ och $b = 9/40$.