Matematiska Institutionen, KTH

lösning till tentamensskrivning i kompletteringskurs Linjär Algebra, SF1605, den 9 juni 2011, kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden, tel. 0730547891.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Problem:

1. (2p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Lösning: För $n = 1$ är vänstra ledet lika med 0 och högra ledet lika med 0, så för detta värde på n så stämmer formeln.

Vi visar nu

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{3} .$$

Så antag att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Då får vi

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + (n+1)(n+1-1) = \frac{n(n^2-1)}{3} + (n+1)n =$$

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{3} + (n+1)n = n(n+1)(\frac{n-1}{3} + 1) = n(n+1)\frac{n+2}{3}$$

Men då

$$\frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{3} = \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1+1)}{3} ,$$

har vi alltså visat att implikationen ovan är sann.

Enligt induktionsaxiomet gäller nu den givna formeln för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Betrakta R^5 försett med den inre produkten

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 \ .$$

Låt L vara det delrum till R^5 som genereras av vektorerna $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(2, 1, 0, -1, -2)$ samt $(3, 1, 1, -1, -1)$.

(a) (1p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $L^{\perp}$ till L.

Lösning: Ortogonala komplementet till L erhålles från med nollrummet till matrisen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nollrummet till $\mathbf{L}$, dvs de vektorer $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_5)^T$ sådana att $\mathbf{L\bar{x}} = \bar{\mathbf{0}}$, bestämmes med Gausselimination

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Med $x_3 = t$, $x_4 = s$ och $x_5 = u$ som godtyckliga värden på x_3, x_4 och x_5 får vi att systemets lösningar är

$$\bar{x}^T = t(-1 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0) + s(0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0) + u(-1 \ \ 4 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1) \ .$$

Så de tre vektorerna

$$\bar{e}_1 = (-1, 2, 1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (-1, 4, 0, 0, 1) \ ,$$

spänner upp $L^{\perp}$. Eftersom dessa vektorer också är linjärt oberoende så utgör de en bas för $L^{\perp}$.

(b) (1p) Utvidga denna bas till en bas för hela R^5.

Lösning: Radrummet till matrisen $\mathbf{L}$ är lika med L. Kalkylerna ovan visar att då utgör

$$\bar{e}_4 = (1, 0, 1, 0, 1), \quad \bar{e}_5 = (0, 1, -2, -1, -4)$$

en bas för L. Enligt känd sats i kursboken utgör vektorerna i en bas för L, tillsammans med vektorerna i en bas för $L^{\perp}$, en bas för hela rummet, så

SVAR: Vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_5$ ovan.

(c) (2p) Skriv vektorn $(1, 2, 3, 4, 5)$ som en summa av en vektor i L och en vektor i $L^{\perp}$.

Lösning: Om $\bar{a} = \bar{u} + \bar{v}$ där $\bar{u} \in L$ och $\bar{v} \in L^{\perp}$ så är $\bar{u} = \mathrm{Proj}_L(\bar{a})$.

Vi bestämmer först en ortogonalbas $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ i L med hjälp av Gram-Scmidts metod:

Låt $\bar{f}_1 = \bar{e}_5 = (1, 0, 1, 0, 1)$ och

$$\bar{f}_2 = \bar{e}_5 - \frac{\bar{f}_1 \cdot \bar{e}_5}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}\bar{f}_1 = \bar{e}_5 - \frac{-6}{3}\bar{f}_1 = (2, 1, 0, -1, -2)$$

Nu har vi enligt formeln för projektion

$$\mathrm{Proj}_L(\bar{a}) = \frac{\bar{f}_1 \cdot \bar{a}}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}\bar{f}_1 + \frac{\bar{f}_2 \cdot \bar{a}}{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2}\bar{f}_2 = \frac{9}{3}\bar{f}_1 + \frac{-10}{10}\bar{f}_2 = (1, -1, 3, 1, 5)$$

Nu till slut

$$(1, 2, 3, 4, 5) = (1, -1, 3, 1, 5) + (0, 3, 0, 3, 0)\ .$$

vilket blir vårt svar.

3. (3p) Låt L vara ett 4-dimensionellt delrum till det 5-dimensionella vektorrummet V och låt A vara en linjär avbildning från V till vektorrummet W. Låt $A(L)$ beteckna det delrum till W som består av de vektorer $A(\bar{v})$ i W för vilka $\bar{v}$ tillhör L.

   Vilka möjligheter finns det för dimensionen hos delrummet $A(L)$ till W om A:s kärna har dimensionen 1. För full poäng krävs att du ger ett bevis av ditt svar.

Lösning: Eftersom A:s kärna har dimension 1 så finns det två fall, *fall 1:* A:s kärna är ett delrum till L, och *fall 2:* A:s kärna har endast nollvektorn gemensam med L.

Fall 1: Låt $\bar{e}_1$ vara en bas för A:s kärna och utvidga till en bas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ för L. Varje vektor $\bar{x}$ i L är då en linjärkombination

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4$$

för några tal x_1, ..., x_4. Eftersom A är linjär så består $A(L)$ av alla linjärkombinationer

$$A(\bar{x}) = x_1A(\bar{e}_1) + x_2A(\bar{e}_2) + x_3A(\bar{e}_3) + x_4A(\bar{e}_4) \tag{1}$$

Eftersom $A(\bar{e}_1) = \bar{0}$ så består $A(L)$ i detta fall av alla linjärkombinationer av vektorerna $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ och $A(\bar{e}_4)$. Dessa tre vektorer är linjärt oberoende eftersom

$$x_2A(\bar{e}_2) + x_3A(\bar{e}_3) + x_4A(\bar{e}_4) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad A(x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4) = \bar{0}$$

och alltså

$$x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 \in \ker(A) \quad \Rightarrow \quad x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 = x_1\bar{e}_1\ ,$$

så eftersom $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ är linjärt oberoende finner vi då att $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ 0ch $x_4 = 0$.

Delrummet $A(L)$ har alltså i detta fall dimension 3.

Fall 2: Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ vara en bas för L. Fortfarande gäller ekvation (1). Då är vektorerna $A(\bar{e}_1)$, $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ och $A(\bar{e}_4)$ linjärt oberoende eftersom

$$x_1A(\bar{e}_1) + x_2A(\bar{e}_2) + x_3A(\bar{e}_3) + x_4A(\bar{e}_4) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad A(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4) = \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 \in \ker(A) \cap L = \{\ \bar{0}\ \}\ .$$

så eftersom $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ är linjärt oberoende finner vi att $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ 0ch $x_4 = 0$.

Eftersom vektorerna $A(\bar{e}_1)$, $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ och $A(\bar{e}_4)$ enligt ekvation (1) dessutom spänner upp $A(L)$ så bildar dessa vektorer en bas för $A(L)$. Dimension av $A(L)$ i detta fall är då lika med fyra.

4. (3p) Betrakta rummet $\mathcal{P}_n$ av polynom av grad högst lika med n och låt D beteckna derivering av polynom. Den linjära avbildningen A på $\mathcal{P}_n$ definieras genom

$$A(p(t)) = tD(p(t))\ .$$

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen A.

Lösning: Vi ser omedelbart att, för $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$A(t^\lambda) = t \cdot \lambda t^{\lambda-1} = \lambda t^\lambda$$

Alltså är talen $0, 1, 2, \ldots, n$ egenvärden till A. Eftersom en linjär operator på ett vektorrum av dimension m kan ha högst m stycken olika egenvärden så kan det, emedan $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$, inte finnas fler egenvärden än de ovan angivna.

Egenvektorer som hör till skilda egenvärden är linjärt oberoende. Eftersom $\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$ så kan alltså inget av de $n+1$ olika egenrummen E_λ, för $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$, ha en dimension större än 1. Således

$$E_\lambda = \mathrm{span}\{t^\lambda\}$$

för $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$.

5. (3p) Låt A beteckna en linjär avbildning från vektorrummet V till vektorrummet W och låt B beteckna en linjär avbildning från W tillvektorrummet U. Under vilka förutsättningar kommer sammansättningen $B \circ A$ att vara en inverterbar linjär avbildning.

Lösning: En linjär avbildning som är både surjektiv och injektiv kommer att vara inverterbar, och varje inverterbar linjär avbildning har dessa egenskaper. Som konsekvens av detta visar vi att den sammansatta linjära avbildningen $B \circ A$ är inverterbar om och endast om nedanstående tre villkor är uppfyllda.

(i) $\ker(A) = \{\bar{0}\}$.

(ii) $\mathrm{Im}(B) = U$.

(iii) Varje vektor i W kan skrivas som en unik summa av en vektor i $\mathrm{Im}(A)$ och en vektor i $\ker(B)$, eller annorlunda uttryckt $W = \mathrm{Im}(A) \times \ker(B)$.

Vi visar först att villkoren är nödvändiga:

Antag att $\bar{0} \neq \bar{x} \in \ker(A)$. Då gäller att

$$B \circ A(\bar{x}) = B(\bar{0}) = \bar{0} ,$$

eftersom varje linjär avbildning avbildar nollvektorn på nollvektorn. Eftersom $B \circ A$ är linjär så är även $B \circ A(\bar{0}) = \bar{0}$, och $B \circ A$ är inte injectiv. Villkoret (i) är alltså nödvändigt om $B \circ A$ skall vara inverterbart.

Om B inte är surjektiv så finns ett $\bar{u} \in U$ sådant att ingen vektor i W avbildas på $\bar{u}$. Men eftersom alla vektorer i $\mathrm{Im}(A)$ tillhör W finns då ingen vektor $\bar{v} \in V$ sådan att $B(A(\bar{v})) = \bar{u}$. Alltså är vilkoret (ii) nödvaändigt.

Antag att villkoret (iii) inte är uppfyllt. Vi visar att då är inte $B \circ A$ injektiv. Så antag att det finns $\bar{w} \in W$ med

$$\bar{w} = \bar{a} + \bar{b} = \bar{a}' + \bar{b}' ,$$

där $\bar{a}, \bar{a}' \in \mathrm{Im}(A)$ och $\bar{b}, \bar{b}' \in \ker(B)$. Då gäller

$$\bar{a} - \bar{a}' = \bar{b}' - \bar{b} \in \ker(B) .$$

Låt nu $\bar{v}$ och $\bar{v}'$ vara sådana att $A(\bar{v}) = \bar{a}$ och $A(\bar{v}') = \bar{a}'$. Vi finner att

$$B \circ A(\bar{v} - \bar{v}') = B(A(\bar{v}) - A(\bar{v}')) = B(\bar{a} - \bar{a}') = \bar{0} ,$$

och då $\bar{v} - \bar{v}' \neq \bar{0}$ kan inte $B \circ A$ vara injektiv (eftersom $B \circ A(\bar{0}) = \bar{0}$).

Vi visar nu att villkoren också är tillräckliga:

Låt $\bar{u}$ vara en godtyckligt vektor i U. Då finns, om (ii) är uppfyllt, en vektor $\bar{w} \in W$ sådan att $B(\bar{w}) = \bar{u}$. Vi skriver nu $\bar{w}$ som en summa

$$\bar{w} = \bar{a} + \bar{b} ,$$

av en vektor $\bar{u} \in \mathrm{Im}(A)$ och en vektor $\bar{b} \in \ker(B)$, vilket är möjligt om (iii) är uppfyllt. Då gäller att

$$\bar{u} = B(\bar{a} + \bar{b}) = B(\bar{a}) + B(\bar{b}) = B(\bar{a}) + \bar{0} = B(\bar{a}) .$$

Låt $\bar{v}$ vara sådan att $A(\bar{v}) = \bar{a}$. Från ovan får vi då

$$B \circ A(\bar{v}) = B(A(\bar{v})) = B(\bar{a}) = \bar{u} .$$

Eftersom $\bar{u}$ var en godtycklig vektor i U har vi visat att under förutsättningarn (i), (ii) och (iii) så är $B \circ A$ surjektiv.

Nu till injektiviteten hos $B \circ A$.

Antag att $\bar{v} \neq \bar{0}$ och $B \circ A(\bar{v}) = \bar{0}$, dvs att $B \circ A$ inte är injektiv. Låt $\bar{a} = A(\bar{v}) \in \mathrm{Im}(A)$. Då gäller

$$B(\bar{a}) = B(A(\bar{v})) = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \bar{a} \in \ker(B) ,$$

och alltså kan vi skriva elementet $\bar{a} \in W$ som

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} ,$$

där vi dels kan betrakta $\bar{a}$ som ett element i $\mathrm{Im}(A)$ och dels som ett element i $\ker(B)$. Vektorn $\bar{a}$ kan alltså skrivas på två olika sätt som en summa av vektorer i $\mathrm{Im}(A)$ och $\ker(B)$.