Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kompetteringskurse i Linjär algebra, 5B1110, fredagen den 9 januari 2004.

1. Påståendet är sant för $n = 0$ eftersom $1 = (2 + 0 + 0)/2$.

   Vi visar nu att om $1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = (2 + 5n + 3n^2)/2$ så kommer $1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3(n + 1)) = (2 + 5(n + 1) + 3(n + 1)^2)/2$.

   Vi finner nämligen att om $1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = (2 + 5n + 3n^2)/2$ så gäller att

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3(n + 1)) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) + (1 + 3(n + 1)) =$$

$$\frac{2 + 5n + 3n^2}{2} + (1 + 3(n + 1)) = \frac{2 + 5n + 3n^2 + 2(1 + 3(n + 1))}{2} =$$

$$\frac{2 + 5(n + 1) + 3(n + 1)^2}{2}.$$

   Enligt induktionsaxiomet är nu påståendet sant.

2. Då

$$T(1) = \frac{< 1, 1 + x >}{< 1 + x, 1 + x >}(1 + x) = \frac{\int_{-1}^{1} 1 + x}{\int_{-1}^{1} 1 + 2x + x^2}(1 + x) = \frac{3}{4}(1 + x) = \frac{3}{4}1 + \frac{3}{4}x$$

   och

$$T(x) = \frac{< x, 1 + x >}{< 1 + x, 1 + x >}(1 + x) = \frac{\int_{-1}^{1} x + x^2}{\int_{-1}^{1} 1 + 2x + x^2}(1 + x) = \frac{1}{4}(1 + x) = \frac{1}{4}1 + \frac{1}{4}x$$

   så blir avbildningens matris

$$T = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3. Vi andvänder Gram-Schmidts metod för att hitta en ortogonalbas. Låt $f_1 = (1, 1, -1, 2, 3)$ och

$$f_2 = (2, 3, 1, 3, 2) - \frac{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (2, 3, 1, 3, 2)}{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1, 2, 3)}(1, 1, -1, 2, 3) = (1, 2, 2, 1, -1).$$

   Vidare låter vi

$$f_3 = (3, 1, 0, -3, 2) - \frac{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (3, 1, 0, -3, 2)}{(1, 1, -1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1, 2, 3)}(1, 1, -1, 2, 3) -$$

$$\frac{(1, 2, 2, 1, -1) \cdot (3, 1, 0, -3, 2)}{(1, 2, 2, 1, -1) \cdot (1, 2, 2, 1, -1)}(1, 2, 2, 1, -1) = \frac{1}{4}(11, 3, -1, -14, 5).$$

   Vi normerar dessa vektorer och får

   Svar: $e_1 = \frac{1}{4}(1, 1, -1, 2, 3)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -1, 2, 3)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{352}}(11, 3, -1, -14, 5)$.

4. b) En vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) tillhör det sökta ortogonala komplementet precis då

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (1, 0, 0, 1) = 0 \quad \text{och} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0, 2, 0, 1) = 0.$$

Dessa ekvationer ger ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer vars lösningsmängd är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(2, 1, 0, -2) + t(0, 0, 1, 0)$$

och alltså

Svar: $\text{span}\{(2, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 0)\}$

5. a) Om $< x_1, y >=< x_2, y >$ för alla y så gäller att $< x_1 - x_2, y >= 0$ för alla y, dvs $x_1 - x_2$ är ortogonal mot alla vektorer y i vektorrummet.

b) Låt $y = x_1 - x_2$. Vi får då att $< x_1 - x_2, x_1 - x_2 >= 0$ med enda möjligheten att $x_1 - x_2 = 0$.